R

<36625984010017

<36625984010017

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 199 h

Häfeli.

, Mathesis pag. 449.

R

Ebene und körperliche
Elementar-Geometrie
für
Bürger- und andere Real-Schulen,
so wie zum Selbstunterricht.

Von
J. C. Häfeli.

Mit 4 Kupfertafeln.

Nebst einer Vorrede
von
G. U. A. Vieth,
Fürstl. Anhalt-Dessauischem Schuldirector und Professor
der Mathematik.

Zürich und Leipzig,
bey Ziegler und Söhnen.
1806.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Es ist für den ruhigen Beobachter eine erfreuliche Erscheinung, daß Philosophie, Mathematik und Pädagogik sich immer freundschaftlicher die Hände bieten. Wenn diese drey mit einander in Bündniß treten, so kann der Erfolg nicht anders als wohlthätig für die jugendliche Bildung seyn. Die Kenntnisse, welche unter dem vielumfassenden Nahmen der Größenlehre begriffen werden, sind von so allgemein anerkanntem Nutzen, sowohl in formaler Hinsicht für das Denkvermögen, als in materialer für den Gebrauch im gemeinen Leben, daß es in der That äußerst wünschenswerth ist, sie immer weiter in

dem Kreise der bürgerlichen Gesellschaft verbreitet zu sehen. Der Mangel derselben setzt oft den übrigens gebildeten Mann in Verlegenheiten bey seinen Geschäften, und gibt ihm lächerliche Blößen in der Unterredung. Ueber welchen Gegenstand der Natur und Kunst kann man auch wohl sich unterhalten, ohne auf Dinge zu stoßen, die mathematische Kenntnisse voraussetzen? Von diesen Dingen — und es sind gerade die, welche täglich vorkommen, z. B. alles was auf Bewegung, auf Maschinen, auf Schätzung von Flächen oder des Inhalts körperlicher Räume u. dgl. m. sich bezieht — von diesen Dingen wird oft in Gesellschaften so sehr schief geurtheilt, daß der Kenner sich des Lächelns oder des Unwillens nicht enthalten kann, und bey sich denkt: es ist ihnen eine Thorheit, und sie können's nicht begreifen, denn es will mathematisch beurtheilt seyn!

Wer also in seinem Wirkungskreise dazu beytragen kann, diese Kenntnisse zu verbreiten, der thue es doch ja; und wer es thut, macht sich ein Verdienst um die Menschheit. Der Schulmann insbesondere ist

in der Lage, die Elemente der Mathematik seinen Schülern mittheilen zu können, falls er nur selbst nicht ganz unerfahren darin ist. Tiefe, gelehrte Kenntnisse sind in der That dazu nicht nöthig; und ein übrigens denkender Kopf kann sich so viel Geometrie u. s. w. als zum Unterricht von Knaben von 10 bis 15 Jahren nöthig ist, leicht zu eigen machen. Die Gabe des Vortrags, die Methode, ist im Grunde mehr Hauptsache für ihn, als große Masse von Kenntnissen. Er könnte in Ansehung der letztern ein Euler, ein Kästner, und bey alle dem ein sehr unbrauchbarer Lehrer für eine Anzahl junger Leute in den ersten Anfangsgründen seyn.

Eine Schule aber, die einen Lehrer besitzt, bey dem sich Vorrath von Kenntnissen mit Methode zusammen finden — eine solche Schule kann sich Glück wünschen! Und in diesem Falle befindet sich gewiß diejenige, woran der Verfasser des gegenwärtigen Buches arbeitet. Ich darf diesem Buche ohne Bedenken die günstige Aufnahme versprechen, die es verdient. Mir wenigstens scheint es seinem, auf dem

Titel angegebenen Zwecke völlig angemessen bearbeitet zu seyn. Möge es in den Händen seines schätzbaren Verfassers und vieler andern Lehrer all den Nutzen stiften, dessen es so fähig ist! —

Dessau, den 10ten März
1806.

G. U. A. Vieth,
Fürstl. Anhalt-Dessauischer Schuldirector
und Professor der Mathematik.

Nachschrift des Verfassers.

Den vorstehenden Worten meines verehrten ehmahligen Lehrers, sey mir erlaubt noch Folgendes hinzu zu setzen.

1) Exempel beyzufügen, würde die Bogenzahl zu sehr vergrößert haben. Geübte Lehrer bedürfen ihrer ohnehin nicht; und für die ungeübtern ist es eine nützliche Mühe, dergleichen zu erfinden, welches mit um so weniger Schwierigkeit geschehen dürfte, da ich mir im Vortrage der Regeln Deutlichkeit und Faßlichkeit so sehr zum Gesetz gemacht, daß ich mich fast schäme zu sagen, wie oft ich diesen und jenen Satz, so wie die Ordnung, in die ich ihn gegen andere gestellt, geändert, verworfen und wieder verworfen habe; weil ich dieß Buch hauptsächlich auch zum ersten Selbstunterricht für solche, die erst bey reiferm Alter Geschmack an der Geometrie bekommen, brauchbar machen, und dem Schüler die Repetition, ohne die kein Unterricht haftet, so leicht als nur irgend möglich machen wollte.

2) Ich besitze einen vollständigen Apparat zur Versinnlichung geometrischer Lehrsätze; und den sollte eigentlich ein jeder Lehrer haben. Wer einen solchen verlangt, dem will ich gern dienen; und zwar werde

ich einen doppelten Nutzen damit verbinden, indem ich z. B. die geometrischen Körper aus lauter verschiedenen inländischen Holzarten verfertigen lasse, so daß sie auch zugleich ein naturhistorisches Interesse haben. Ohne einen solchen Alles anschaulich machenden Apparat lernt die Jugend nur mit halber Lust, schwer und langsamen Fortschritts. Lehrer, die sich deßhalb an mich wenden, können sich um so mehr versichert halten, daß ich auf die äußerste Wohlfeilheit bedacht seyn werde, und nicht den geringsten Profit suche, als ja „Schulmann seyn“ und „Plusmachen“ zwey so disparate Hantirungen sind, daß ich mich dreist auf manche Schul-Collatoren meines schweizerischen Vaterlandes berufen darf, die mir gestehen müssen: daß, wenn nicht der Lehrer (großmüthig, oder thörigt — wie man lieber will —) einen ansehnlichen Theil seines Halbsattsoldes *) für die Bedürfnisse der Schule verwendete, es um dieselbe kläglicher als kläglich aussehen würde.

Frauenfeld im März 1806.

H.

---

*) Man verzeihe mir dieses neue Wort für eine so alte und gemeine Sache!!

Inhalts = Verzeichniß.

Vorbereitende Erklärungen. §. 1 — 30.

A. Planimetrie.

I. Vom Linien= oder Längenmaße. §. 31 — 51.
II. Von den Grundsätzen. §. 52. 53.
III. Von den Winkeln. §. 54 — 66.
IV. Vom Kreise. §. 67 — 83.
V. Vom Maaße der Winkel. §. 84 — 93.
VI. Von den Parallel=Linien. §. 94 — 102.
VII. Von den Dreyecken. §. 103 — 128.
VIII. Von den Vierecken, insonderheit den Parallelogrammen. §. 129 — 137.
IX. Von den regulären Vielecken, oder Polygonen. §. 138 — 151.
X. Von der Aehnlichkeit der Figuren. §. 152 — 156.
XI. Von der Gleichheit des Flächenraums. §. 157 — 167.
XII. Vom Quadrat= oder Flächenmaße, und von der Ausrechnung geradliniger Figuren. §. 168 — 177.
XIII. Von der Kreisrechnung. §. 178 — 184.
XIV. Von der Vergleichung und Veränderung der Flächen ähnlicher Figuren. §. 185 — 189.
XV. Vom Feldmessen. §. 190 — 194.

B. Stereometrie.

XVI. Von den geometrischen Körpern überhaupt. §. 195 — 203.

XVII. Von der Gleichheit des Raumes gleichartiger Körper. §. 204 — 206.

XVIII. Von der Gleichheit des Raumes verschiedenartiger Körper. §. 207 — 212.

XIX. Von der Ausrechnung der Oberflächen der Körper. §. 213. 214.

XX. Vom Cubik- oder Körpermaß, und von der Ausrechnung des Inhalts der Körper. §. 215 — 224.

Anhang.

Kurze Anweisung zum Zeichnen; insbesondere von den dazu nöthigen Materialien und Instrumenten. S. 156.

Vorbereitende Erklärungen.

§. 1. Geometrie.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Ausmessung des Raumes; daher sie eben die Meßkunst genannt wird.

§. 2. Raum.

Man denke sich etwa eine Mauer, oder ein Zimmer, oder eine Kiste u. dgl. m. An denselben werden einem sogleich drey Stücke auffallen:

1.) ihre Länge,

2.) ihre Breite,

3.) ihre Dicke (oder bey dem Zimmer seine Höhe, und bey der Kiste ihre Tiefe).

Von diesen drey Stücken sagen wir, daß sie einen Raum einnehmen.

§. 3. Körper.

Ein jeder zusammenhängender (stetiger) Raum nun, welcher eine Ausdehnung nach der Länge, Breite und Dicke (oder Höhe, oder Tiefe) hat, heißt in der

Geometrie ein Körper, oder ist ein geometrischer Körper, und nach allen Seiten ausgedehnt und begränzt.

Anmerk. Die Wörter: Länge, Breite, Dicke, Höhe, Tiefe — werden im gemeinen Leben, je nachdem von diesem oder jenem Gegenstande die Rede ist, verschieden gebraucht. Z. B.

Von einem schmalen Hause sagt man: seine Breite, Höhe und Tiefe (von vorn nach hinten zu).

Von einem langen Hause: seine Länge, Höhe und Tiefe.

Von einer schmalen Mauer: ihre Breite, Höhe und Dicke.

Von einer langen Mauer: ihre Länge, Höhe und Dicke.

Von einem Bret oder Quaderstein: seine Länge, Breite und Dicke. — U. s. w.

Es gibt ferner Körper, bey welchen man nur von zwey Arten der Ausdehnung redet, wenn schon auch eigentlich alle drey Statt haben. Z. B.

Von einer aufgerichteten Säule sagt man: ihre Höhe und Dicke.

Von einem liegenden Balken: seine Länge und Dicke.

Endlich gibt es eine Gattung Körper, bey denen man nur eine einzige Art der Ausdehnung in Betracht zu ziehen scheint, nähmlich die Kugel, welcher man blos Dicke zuschreibt, und nach Maßgabe derselben sie groß

oder klein nennt. Im Grunde aber findet auch bey der Kugel, wie überhaupt bey einem jeden Körper eine dreyfache Ausdehnung Statt.

§. 4. Flächen.

Man kann sich aber auch einen Raum vorstellen, bey welchem bloß eine Ausdehnung nach der Länge und Breite Statt hat; und das wäre also z. B. bey einer Mauer, einem Garten, einem Stubenboden u. s. w. die Oberfläche derselben. Ein solcher Raum, der bloß lang und breit ist, ohne daß man auf seine etwannige Dicke (oder Höhe, oder Tiefe) sieht, heißt eine Fläche; und die Flächen sind die Gränzen des Körpers, oder sein Aeußerstes, da wo er aufhört.

§. 5. Linien.

Endlich aber ist auch bloß eine Ausdehnung nach der Länge gedenkbar, da man weiter Nichts wissen will, als nur wie lang z. B. eine Mauer, ein Haus, oder irgend ein Theil davon sey, ohne sich im geringsten um Breite und Dicke zu bekümmern. Der gleiche Fall ist, wenn man die Entfernung zweyer Oerter von einander, die Breite *) eines Flusses u. dgl. m. zu wissen verlangt. Eine solche Ausdehnung nach der bloßen Länge heißt eine Linie; und die Linien sind wieder die Gränzen der Flächen.

---

*) Die, allein betrachtet, gleichfalls nur eine Ausdehnung nach der Länge ist.

§. 6. Figuren.

Eine von Linien begränzte oder eingeschlossene Fläche heißt eine Figur.

Dreyecke, Vierecke u. s. w. sind demnach Figuren, Winkel hingegen nicht; denn zwey gerade Linien können keinen Raum einschließen. Im weitläufigern Sinne bedeutet aber das Wort Figur eine jede geometrische Zeichnung.

§. 7. Fortsetzung von den Linien.

Zeichnung 1. 2.

Nach der (§. 5.) von den Linien gegebenen Erklärung, noch mehr aber aus dem folgenden Beyspiele, wird sich denn ohne große Schwierigkeit begreifen lassen, warum man sich in der Geometrie alle und jede Linien ohne einige Ausdehnung in die Breite oder Dicke zu denken hat: eben weil sie nur die Gränzen der Flächen sind.

Man stelle sich nähmlich die zwey Vierecke 1. und 2. vor. Dieß sind Flächen; denn wir betrachten an ihnen nur die Länge und Breite, gänzlich abgesehen von der Dicke des Papieres, worauf sie gezeichnet sind. Ist nun von ihrer Größe die Rede, so versteht man darunter denjenigen Raum, welcher von den ihn begränzenden Linien eingeschlossen ist. Ob diese Linien so fein, oder noch feiner seyen, als in Zeichn. 1.; oder so breit (im gemeinen Leben sagt man dafür dick), oder noch breiter als in Zeichn. 2. — das ist hier ganz gleichgültig, und kommt bey der Betrachtung beyder Flächen selbst gar nicht in Anschlag. Denn man schneide z. B. die Fläche des

Viereckes 2. d. h. das Viereck 2. selbst genau aus, so daß man von der schwarzen Einfassung oder Begränzung gar nichts mehr sähe: so sind da, wo das Papier zu Ende ist, wo es aufhört, wo nichts mehr ist — die Gränzen des Viereckes, die also unmöglich einige Breite haben können; und auch keine Dicke, weil bey einer Fläche einzig und allein die Oberfläche in Betrachtung kommt, die natürlich ohne alle Dicke ist: folglich sind es auch ihre Gränzen.

Will man eine Fläche zeichnen: so lassen sich ihre Gränzen offenbar nicht anders als durch Linien ausdrücken, die wir bald mit dem Bleystift, bald mit der Feder ziehen; und die deßwegen immer einige Breite, oder, wie wir dafür gewöhnlich, wenn gleich geometrisch unrichtig sagen, Dicke haben. Weil aber diese Linien bloße Zeichen für die Gränzen sind, welche dem Obigen zufolge schlechterdings keinerley Breite oder Dicke haben: so darf man auch den geometrischen Linien durchaus keine Breite oder Dicke zuschreiben.

§. 8. Puncte.

Eine jede Linie, groß und klein, ist wieder von zwey Puncten begränzt, welche ihre beyden Enden andeuten. Da man nun nach dem Vorhergehenden einer geometrischen Linie bloß eine Ausdehnung in die Länge, aber keineswegs in die Breite oder Dicke zuschreiben darf: so hat man sich alle geometrischen Puncte, als Gränzen der geometrischen Linien, ganz ohne alle Ausdehnung, oder ohne alle Größe zu denken.

Die scheinbare Schwierigkeit dieses Begriffs fällt sogleich weg, sobald man nur den Begriff von der geometrischen Linie und Gränze recht gefaßt hat, und nun bedenkt, was demnach die Gränze einer Linie seyn muß.

---

§. 9. Entstehungsart der Linien.

Da eine jede Linie anfangen und aufhören kann, wo man immer will, folglich ihr Anfangs- und Endpunct nach Belieben bestimmt werden können, so sagt man: Die Linie entstehe aus der Bewegung eines Punctes.

§. 10. Gerade und krumme Linien.

Nun bewegt sich aber ein Punct entweder in Einem fort nach einerley Gegend oder Richtung, und so entsteht die gerade Linie. Oder er ändert beständig seinen Weg, und dann entsteht aus dieser Bewegung die krumme Linie.

§. 11. Merkmahle einer geraden Linie.

Die hauptsächlichsten Merkmahle einer geraden Linie sind folgende:

1.) Eine gerade Linie geht beständig in Einerley Richtung fort.

2.) Zwischen zwey Puncten findet nur Eine gerade Linie Statt.

3.) Die gerade Linie zwischen zwey Puncten ist kürzer als alle krummen Linien, die man zwischen denselben Puncten zieht.

§. 12. Gerade, krumme, gebrochene, vermischte Linien.

Zeichnung 3.

Vom Puncte A bis zum Puncte B hin sind fünf verschiedene Linien gezogen, wodurch die Puncte A und B mit einander verbunden sind. Aber nur eine von allen diesen Linien ist eine gerade Linie. Die beyden obern nähmlich sind krumme Linien; die vierte ist aus mehreren geraden Linien zusammengesetzt, und heißt eine gebrochene Linie, deren Puncte plötzlich ihre Richtung in C, D und E ändern; die fünfte oder unterste endlich ist eine vermischte Linie, d. h. sie besteht aus krummen und geraden Linien.

§. 13. Dreyerley Gattungen gerader Linien.

In Hinsicht der Richtung, welche eine gerade Linie haben kann, findet eine dreyfache Hauptverschiedenheit Statt. Eine gerade Linie ist entweder perpendikulär, oder horizontal, oder schief.

§. 14. Perpendikuläre Linien.

Wenn eine gerade Linie gegen die Erdfläche die Richtung einer freyhängenden Schnur hat, welche von einem Gewicht herabwärts straff gezogen wird; oder diejenige Richtung, in welcher ein schwerer Körper, z. B. ein Stein sich auf die Erde senkt, wenn man ihn ohne anderweitige Bewegung (also nicht etwa durch Werfen) aus der Hand fallen

fallen läßt: so heißt sie eine senkrechte, lothrechte, oder perpendikuläre Linie und Perpendikel; weil ein stillstehender Perpendikel an einer Uhr diese Richtung hat.

Zusatz. Um zu erfahren, ob eine Wand, eine Mauer senkrecht aufgeführt, oder ein Balken, eine Säule u. s. w. senkrecht aufgerichtet werde, bedienen sich die Maurer und Zimmerleute einer mit einem Bleygewicht versehenen Schnur, die sie daher das Bleyloth nennen. Faßt man nähmlich das obere Ende der Schnur zwischen zwey Finger, hält sie so an die Mauer u. s. w. und die Seite derselben hat mit der vom Gewicht straff gezogenen Schnur einerley Richtung: so ist die Mauer senkrecht. Fällt aber das Bleyloth von der Mauer ab: so weicht dieselbe um so weit von der perpendikulären Richtung ab, als das Bleyloth von ihr absteht.

§. 15. Horizontale Linien.

Hat aber eine gerade Linie die Richtung eines Wagebalkens, in dessen beyden Schalen gleich schwere Gewichte liegen (der also im Gleichgewicht steht): so heißt sie eine wagerechte oder horizontale Linie.

§. 16. Schiefe Linien.

Zeichnung 3.

Alle andern geraden Linien, die weder perpendikulär noch horizontal sind, sind schief. Im gemeinen Leben gebraucht man die Ausdrücke: gerade und schief, als einander entgegengesetzt. Z. B. wenn man ein Blatt Pa-

pier liniiren will, um darauf zu schreiben, so muß man die Linien gerade ziehen und nicht schief. Da ist also schief dem gerade völlig entgegen. In der Geometrie aber heißt auch die sogenannte schiefe Linie eine gerade Linie, sobald sie in einerley Richtung, gleichviel welcher, fortgeht (§. 11.). Also sind die Linien AC, CD, DE, EB, eine jede für sich, und von den andern, mit denen sie in der Zeichnung zusammenhängen, abgesondert betrachtet, eben sowohl gerade Linien, als die Linie AB; wenn sie schon in Vergleichung mit der letztern dem Auge schief, d. i. hier nicht horizontal erscheinen.

§. 17. Arten gerade Linien zu ziehen.

1.) Auf dem Papiere, oder an der Tafel, bedient man sich hierzu bekanntlich eines Lineales.

Zusatz. Ein Lineal zu prüfen, ob es wirklich gerade Linien gebe, verfahre man folgendermaßen:

Man ziehe längs dem Lineale eine Linie, und überschlage es um diese Linie dergestalt, daß das linke Ende des Lineales am linken, das rechte am rechten Ende der Linie bleibt, und die Linie nunmehr dicht unter das Lineal zu liegen kommt. Wenn nun eine zweyte Linie, die man in dieser Lage des Lineales längs demselben durch die beyden Endpuncte der schon vorhandenen ersten Linie ziehen würde, ganz genau in dieselbe hineinfallen müßte, so daß man nur eine einzige Linie sähe: so ist man versichert, daß das Lineal eine durchaus gerade Linie giebt.

Oder: wenn zwey Lineale mit ihren Schärfen an einan-

der gelegt und an einander verschoben (hin und her geschoben) werden, und sie sich in allen Puncten berühren, so daß, wenn man sie während des Verschieben gegen das Licht hält, keine Zwischenräume oder Spalten bemerkbar sind: so sind beyde Lineale richtig. Erblicket man aber irgend einen Zwischenraum, so ist wenigstens Eines fehlerhaft, und man muß auf die oben beschriebene Weise untersuchen, welches?

2.) Um gerade Linien von beträchtlicher Länge zu ziehen, bedienen sich die Zimmerleute einer ausgespannten, mit Kreide oder Kienruß bestrichenen Schnur, welche sie alsdann auf die Bretter oder Balken schnellen lassen. Auch dient eine straff gespannte Schnur um z. B. in einem Garten geradlinige Wege und Beete zu machen.

3.) Zu sehr langen geraden Linien, die auf dem Felde bezeichnet werden sollen, braucht man die sogenannten Absteckstäbe; runde Stäbe oder Stangen, die etwa 1 1/2 Zoll dick, 4 bis 7 Fuß hoch, und an dem untern Ende mit Eisen beschlagen sind. Diese stecket man in einiger Entfernung hinter einander senkrecht (§. 14.) in die Erde, so daß, wenn man das Auge hinter dem ersten hält, dieser die übrigen verdecket. Dieses Verfahren nennt man visiren, oder eine gerade Linie durch Visiren abstecken, welches Mittel die Feldmesser gebrauchen.

§. 18. Krumme Linien.

Es gibt vielerley Gattungen, zum Theil sehr merkwürdige krumme Linien; für die Elementar-Geometrie

gehört aber bloß die Kreislinie. Manche Künstler und Handwerker, z. B. Tischler, Baumeister u. a. m. kommen inzwischen oft in den Fall, auch Schlangenlinien, Schnecken- oder Spirallinien, Ellipsen oder linsenförmige Linien u. dgl. machen zu müssen. Nicht allein Tische haben manchmahl eine länglichrunde oder ovale Form, sondern auch Zimmer, ja bisweilen ganze Gebäude. In den Gärten sind gleichfalls oft dergleichen Beete zu machen. Die Schneckenlinie kommt an einigen Säulen vor, u. s. w. Daher soll die Verzeichnungsart dieser Linien kürzlich angegeben werden.

§. 19. Die Kreislinie.

Zeichnung 4.

Die Kreislinie entsteht dadurch: daß sich eine gerade Linie CB, um den unverrückten Punct C, so lange herumbewegt, bis sie wieder in dieselbe Lage kommt, welche sie hatte, ehe sie sich zu bewegen anfing.

§. 20. Arten eine Kreislinie zu beschreiben.

Zeichnung 5.

1.) Die im vorigen §. erwähnte Entstehungsart einer Kreislinie sieht man am deutlichsten, wenn man mit einem sogenannten Stangenzirkel eine solche beschreibt. Die stählerne Spitze C giebt den Punct, um welchen herum sich das geradlinige Instrument drehet. Die andere Spitze B kann in jeder beliebigen Entfernung von der erstern vermittelst einer Hülse und Schraube A befestigt werden. Diese

Stangenzirkel braucht man hauptsächlich zur Beschreibung großer Kreislinien bey Scheiben in Mühlen und andern Räderwerken. Aber auch zur Einreißung ganzer und halber Kreislinien in metallene Platten, zur Verfertigung von Winkelmessern u. dgl. ist man eines zu diesem Behuf eingerichteten Stangenzirkels benöthigt.

2.) Sonst bedient man sich auf dem Papier und der Tafel des bekannten gewöhnlichen Zirkel-Instruments. Wenn man einen solchen Zirkel nach Belieben öffnet, den einen Fuß oder Schenkel in einen gegebenen Punct stellt, und um diesen den andern Schenkel herumführt, bis eine zusammenhängende Linie beschrieben ist; so erhält man eine Kreislinie.

Zusatz. Anfänger haben an zwey Zirkeln genug; an einem Handzirkel und an einem Einsatzzirkel. Ersterer, der bloß mit zwey stählernen Spitzen versehen ist, dient eigentlich nur zum Abtragen gerader Linien auf's Papier und zum Messen derselben. Bey letzterm kann die eine Spitze abgenommen, und statt deren ein Reißbley oder eine Reißfeder (wovon im Anhang, in der Anweisung zum Zeichnen das Mehrere) eingesetzt werden. Die Güte eines Zirkels hängt hauptsächlich von dem Gewinde im sogenannten Kopf des Zirkels ab. Ist es so beschaffen, daß die Schenkel sich sehr sanft und gleichförmig öffnen lassen, ohne sich jedoch leicht aus der Lage, worin sie gebracht worden, zu verrücken; und treffen beyde Spitzen des Zirkels, wenn man die Schenkel zusammenlegt, in einem sehr feinen Punct zusammen: so ist der Zirkel gut gearbeitet.

3.) Auch eine bloße Schnur, die in dem gegebenen Mittelpunct durch einen Pfahl oder dgl. befestigt, und an welcher ein Stecken angebunden wird, den man bey angespannter Schnur herumführt, dient zur Beschreibung großer Kreislinien in Gärten und auf Feldern, wenn etwa ein Rondel, oder ein kreisrundes Beet zu machen ist.

§. 21. Schlangenlinien und ihre Verzeichnung.

Zeichnung 6. 7.

Schlangenlinien werden auf verschiedene Art gemacht, je nachdem sie stark oder sanft gebogen seyn sollen.

1.) Starkgebogene. Zeichn. 6.

Man ziehe eine gerade Linie AG *); nehme auf derselben einen Punct B an, und beschreibe daraus den Halbkreis AC. Hierauf bezeichne man aus C mit gleicher Zirkelweite den Punct D, und beschreibe aus diesem den Halbkreis CE. Aus E bezeichne man abermahls mit unveränderter Zirkelweite den Punkt F, aus dem man den Halbkreis EG beschreibt. Und so fahre man abwechselnd oberhalb und unterhalb fort, so lang als man die Schlangenlinie haben will.

2.) Sanftgebogene. Zeichn. 7.

Diese beschreibt man nicht mit Halbkreisen, sondern mit bloßen sogenannten Bogen, d. i. kleinern Theilen einer

---

*) Punctirte Linien, wie AG werden auch blinde Linien genannt; und man pflegt diejenigen zu punctiren, welche nicht zur Hauptsache der Zeichnung gehören.

Kreislinie. Je nachdem nun diese mehr oder weniger gewölbt seyn sollen, zieht man drey von einander gleichweit entfernte gerade Linien näher zusammen oder weiter von einander, und verzeichnet alsdann mit beliebiger, aber **immer gleicher** Zirkelweite die Schlangenlinie wie folgt:

Auf der Linie LM setze man den Zirkel in A, und beschreibe den Bogen IN. Dann setze man den Zirkel auf der Linie GH in den Punct B, so daß die Spitze des andern Schenkels genau in den Punct N fällt. Aus diesem beschreibe man den Bogen NO. Der folgende Bogen OP wird wieder aus C in LM beschrieben; und so immer weiter.

§. 22. Schnecken- oder Spirallinien und ihre Verzeichnung.

Zeichnung 8.

Die Windungen der in den Taschenuhren befindlichen Spiralfedern bilden eine **Spirallinie**, dergleichen sich auf folgende Weise verzeichnen läßt.

Man ziehe eine gerade Linie AB; nehme darin einen beliebigen Punct C an, und beschreibe daraus mit beliebiger Zirkelweite (je nachdem die Windungen enger oder weiter werden sollen, mit kleinerer oder größerer,) den Halbkreis DE. Hierauf fasse man DE zwischen den Zirkel, und beschreibe aus D den Halbkreis EF. Die Weite CF giebt aus C den Halbkreis FG. Die Weite DG aus D giebt GH, und endlich CH giebt aus C den Halbkreis HI. Und so immer weiter, wenn die Spirallinie noch mehrere Win-

dungen haben soll, abwechselnd aus den Puncten C und D.

Beschreibt man die Windungen aus C und K, so werden sie enger als die in der Zeichnung; aus C und L hingegen werden sie weiter.

§. 23. Ellipsen und ihre Verzeichnung.
Zeichnung 9.

Eine Ellipse entsteht, wenn man z. B. in ein Brett zwey Stifte oder Nägel A und B einschlägt, deren Entfernung von einander desto größer genommen wird, je länglicher die Ellipse werden soll. Um dieselben legt man eine zusammengebundene Schnur, und innerhalb dieser Schnur, so daß sie gespannt bleibt, fährt man mit einem Bleystift od. dgl. herum, da dann derselbe die Ellipse beschreibt.

Die Puncte A und B heißen die Brennpuncte; die Linie DE, welche durch die Brennpuncte geht, die große Achse; der Punct F, in der Mitte der großen Achse, der Mittelpunct; die Entfernung des Mittelpunctes von jedem Brennpuncte, nähmlich FA und FB, die Eccentricität, und die durch den Mittelpunct F gehende Linie GH die kleine Achse der Ellipse. C ist der Bleystift, mit welchem vermittelst der Schnur AC und BC die Ellipse beschrieben worden.

§. 24. Einige andere länglichrunde Figuren oder Ovale.

Zeichnung 10. 11. 12.

Aus den Zeichnungen und der nachstehenden Erklärung derselben wird sich leicht ergeben, wie dergleichen Figuren auch bey andern Verhältnissen und Größen zu machen seyen.

1.) Zeichnung 10.

Man ziehe eine gerade Linie AB; beschreibe mit beliebiger, aber gleicher Zirkelweite aus den Puncten F und G zwey sich berührende Kreislinien, setze den Zirkel in C, und bezeichne daraus mit unverrückter Oeffnung die Puncte DEHI; setze ihn hierauf in A, und bezeichne daraus die Puncte KM, so wie aus B die Puncte LN. Alle diese Puncte verbinde man unter einander durch Linien, und verlängere je zwey derselben, bis sie sich berühren, oben nach O, und unten nach P. Hierauf setze man den Zirkel in P, öffne denselben bis K oder L, und beschreibe den Bogen KQL. Aus O beschreibe man den Bogen MRN: so hat man das Oval AKQLBNRM.

2.) Zeichn. 11.

Man ziehe eine gerade Linie AB, nehme darin einen Punct D an, und beschreibe aus demselben eine Kreislinie. Hierauf setze man den Zirkel in denjenigen Punct E ein, in welchem die Kreislinie durch AB geht, und beschreibe daraus mit gleicher Zirkelweite eine zweyte Kreislinie. Aus A bezeichne man wieder mit gleicher Oeffnung des Zirkels

die Puncte F und G; aus B die Puncte H und I. Endlich setze man den Zirkel in K, öffne ihn bis F oder H, und beschreibe den Bogen FMH; eben so aus L den Bogen GNI: so hat man das Oval AFMHBING.

3.) Zeichn. 12.

Man ziehe wiederum eine gerade Linie AB, nehme darin zwey Puncte F und G an, setze in dieselben den Zirkel, und beschreibe daraus oben und unten Bogen, welche einander in H und I durchkreuzen, oder, wie man in der Geometrie sagt, sich schneiden. Durch diese Schneidungspuncte ziehe man die Linie HI, und alsdann die übrigen HFM, HGN, IFK, IGL. Hierauf beschreibe man aus I mit der Länge IH den Bogen KL; aus H mit der gleichen Länge den Bogen MN; aus F mit der Länge FA den Bogen MAK, und aus G mit der gleichen Länge GB den Bogen LBN: so hat man das Oval AKHLBNIM.

Beschreibt man Bogen mit den kleinern Längen IO und FR, so erhält man das innere kleinere Oval; nimmt man hingegen die größern Längen IP und GS, so entsteht das äußere größere Oval.

---

§. 25. Glatte Flächen.

Glatt heißt ein Körper, dessen Oberfläche keine dem Auge oder dem Gefühl bemerkbare Erhabenheiten oder Vertiefungen hat. Das Gegentheil von glatt ist rauh. Die Oberfläche eines Papieres, worauf man gerade Linien ziehen will, muß nothwendig glatt seyn, indem sonst die

Merkmahle einer geraden Linie (§. 11.) nicht Statt haben könnten.

Allein es gibt auch glatte Flächen, auf denen man keine einzige gerade Linie ziehen kann, z. B. die Oberfläche einer polirten Kugel, die äußere und innere Oberfläche der Taschenuhrengläser, der Hohlspiegel u. s. w.

Ferner gibt es glatte Flächen, worauf man nur nach einigen Richtungen gerade Linien ziehen kann. Die äussere und innere Oberfläche an der Seitenwand der gewöhnlichen glatten Trinkgläser, oder die Oberfläche einer gut gedrechselten Walze (Cylinder), eines Flintenlaufes u. dgl. ist so beschaffen, daß man darauf von oben nach unten zu, und umgekehrt, eine Menge gerader Linien neben einander verzeichnen könnte. Hingegen würden alle und jede Linien, die man in irgend einer andern Richtung auf diesen Oberflächen ziehen wollte, krumm werden.

Allein auf der Oberfläche eines gewöhnlichen Spiegels, oder einer Fensterscheibe (wenn sie gut geschliffen sind), oder eines richtig abgehobelten Reißbrettes, kann man nach allen beliebigen Richtungen hin gerade Linien ziehen.

§. 26. Ebene Flächen.

Eine Oberfläche nun, worauf nach allen und jeden Richtungen hin gerade Linien gezogen werden können, die ganz in die Fläche fallen, heißt eine ebene Fläche oder Ebene.

Anmerk. Wollte man auf einem, außer irgend einer kleinen Vertiefung sonst ganz eben abgehobelten Brette nach

allen Richtungen hin Linien ziehen: so würden diese entweder, wenn sie durch die Vertiefung gezogen würden, in dieser Stelle krumm oder gebrochen; oder, wenn man an dem Rande der Vertiefung aufhörte, unterbrochen werden, und also nicht ganz in die Fläche fallen. Daher gehört dieß zum vollständigen Kennzeichen einer ebenen Fläche.

§. 27. Horizontale Ebenen.

Zeichnung 13.

Eine horizontale Ebene ist diejenige, auf der man nach allen und jeden Richtungen hin Horizontal-Linien ziehen kann *). Die Oberfläche eines ruhig stehenden Wassers ist horizontal.

Zusatz. Wenn man ein Lineal senkrecht auf die Mitte eines andern, und oben an dem erstern ein Bleyloth befestigt, so hat man eine Setzwage (auch Schrotwage, Bleywage und Wasserwage genannt), vermittelst deren man untersuchen und erfahren kann, ob eine Linie oder Fläche horizontal sey. Stellt man dieß Werkzeug mit dem untern Lineale AB z. B. auf einen Tisch oder Balken, oder auf eine Mauer, und die Schnur des freyhängenden Bleylothes DK fällt gerade in die gegen AB senkrechte Linie DC: so ist man versichert, daß die Fläche des Tisches u. s. w. horizontal sey. Neigt sich aber das Bleyloth zur Seite: so weicht die Fläche so weit von der Horizontal-Richtung ab, als DK von DC abweicht.

---

*) Oder: gegen welche eine lothrechte Linie senkrecht ist — welches aber erst aus §. 61. recht verstanden werden kann.

§. 24. Einige andere länglichrunde Figuren oder Ovale.

Zeichnung 10. 11. 12.

Aus den Zeichnungen und der nachstehenden Erklärung derselben wird sich leicht ergeben, wie dergleichen Figuren auch bey andern Verhältnissen und Größen zu machen seyen.

1.) Zeichnung 10.

Man ziehe eine gerade Linie AB; beschreibe mit beliebiger, aber gleicher Zirkelweite aus den Puncten F und G zwey sich berührende Kreislinien, setze den Zirkel in C, und bezeichne daraus mit unverrükter Oeffnung die Puncte DEHI; setze ihn hierauf in A, und bezeichne daraus die Puncte KM, so wie aus B die Puncte LN. Alle diese Puncte verbinde man unter einander durch Linien, und verlängere je zwey derselben, bis sie sich berühren, oben nach O, und unten nach P. Hierauf setze man den Zirkel in P, öffne denselben bis K oder L, und beschreibe den Bogen KQL. Aus O beschreibe man den Bogen MRN: so hat man das Oval AKQLBNRM.

2.) Zeichn. 11.

Man ziehe eine gerade Linie AB, nehme darin einen Punct D an, und beschreibe aus demselben eine Kreislinie. Hierauf setze man den Zirkel in denjenigen Punct E ein, in welchem die Kreislinie durch AB geht, und beschreibe daraus mit gleicher Zirkelweite eine zweyte Kreislinie. Aus A bezeichne man wieder mit gleicher Oeffnung des Zirkels

die Puncte F und G; aus B die Puncte H und I. Endlich setze man den Zirkel in K, öffne ihn bis F oder H, und beschreibe den Bogen FMH; eben so aus L den Bogen GNI: so hat man das Oval AFMHBING.

3.) Zeichn. 12.

Man ziehe wiederum eine gerade Linie AB, nehme darin zwey Puncte F und G an, setze in dieselben den Zirkel, und beschreibe daraus oben und unten Bogen, welche einander in H und I durchkreuzen, oder, wie man in der Geometrie sagt, sich schneiden. Durch diese Schneidungspuncte ziehe man die Linie HI, und alsdann die übrigen HFM, HGN, IFK, IGL. Hierauf beschreibe man aus I mit der Länge IH den Bogen KL; aus H mit der gleichen Länge den Bogen MN; aus F mit der Länge FA den Bogen MAK, und aus G mit der gleichen Länge GB den Bogen LBN: so hat man das Oval AKHLBNIM.

Beschreibt man Bogen mit den kleinern Längen IO und FR, so erhält man das innere kleinere Oval; nimmt man hingegen die größern Längen IP und GS, so entsteht das äußere größere Oval.

---

§. 25. Glatte Flächen.

Glatt heißt ein Körper, dessen Oberfläche keine dem Auge oder dem Gefühl bemerkbare Erhabenheiten oder Vertiefungen hat. Das Gegentheil von glatt ist rauh. Die Oberfläche eines Papieres, worauf man gerade Linien ziehen will, muß nothwendig glatt seyn, indem sonst die

Merkmahle einer geraden Linie (§. 11.) nicht Statt haben könnten.

Allein es gibt auch glatte Flächen, auf denen man keine einzige gerade Linie ziehen kann, z. B. die Oberfläche einer polirten Kugel, die äußere und innere Oberfläche der Taschenuhrengläser, der Hohlspiegel u. s. w.

Ferner gibt es glatte Flächen, worauf man nur nach einigen Richtungen gerade Linien ziehen kann. Die äussere und innere Oberfläche an der Seitenwand der gewöhnlichen glatten Trinkgläser, oder die Oberfläche einer gut gedrechselten Walze (Cylinder), eines Flintenlaufes u. dgl. ist so beschaffen, daß man darauf von oben nach unten zu, und umgekehrt, eine Menge gerader Linien neben einander verzeichnen könnte. Hingegen würden alle und jede Linien, die man in irgend einer andern Richtung auf diesen Oberflächen ziehen wollte, krumm werden.

Allein auf der Oberfläche eines gewöhnlichen Spiegels, oder einer Fensterscheibe (wenn sie gut geschliffen sind), oder eines richtig abgehobelten Reißbrettes, kann man nach allen beliebigen Richtungen hin gerade Linien ziehen.

§. 26. Ebene Flächen.

Eine Oberfläche nun, worauf nach allen und jeden Richtungen hin gerade Linien gezogen werden können, die ganz in die Fläche fallen, heißt eine ebene Fläche oder Ebene.

Anmerk. Wollte man auf einem, außer irgend einer kleinen Vertiefung sonst ganz eben abgehobelten Brette nach

allen Richtungen hin Linien ziehen: so würden diese entweder, wenn sie durch die Vertiefung gezogen würden, in dieser Stelle krumm oder gebrochen; oder, wenn man an dem Rande der Vertiefung aufhörte, unterbrochen werden, und also nicht ganz in die Fläche fallen. Daher gehört dieß zum vollständigen Kennzeichen einer ebenen Fläche.

§. 27. Horizontale Ebenen.

Zeichnung 13.

Eine horizontale Ebene ist diejenige, auf der man nach allen und jeden Richtungen hin Horizontal-Linien ziehen kann *). Die Oberfläche eines ruhig stehenden Wassers ist horizontal.

Zusatz. Wenn man ein Lineal senkrecht auf die Mitte eines andern, und oben an dem erstern ein Bleyloth befestigt, so hat man eine Setzwage (auch Schrotwage, Bleywage und Wasserwage genannt), vermittelst deren man untersuchen und erfahren kann, ob eine Linie oder Fläche horizontal sey. Stellt man dieß Werkzeug mit dem untern Lineale AB z. B. auf einen Tisch oder Balken, oder auf eine Mauer, und die Schnur des freyhängenden Bleylothes DK fällt gerade in die gegen AB senkrechte Linie DC: so ist man versichert, daß die Fläche des Tisches u. s. w. horizontal sey. Neigt sich aber das Bleyloth zur Seite: so weicht die Fläche so weit von der Horizontal-Richtung ab, als DK von DC abweicht.

---

*) Oder: gegen welche eine lothrechte Linie senkrecht ist — welches aber erst aus §. 61. recht verstanden werden kann.

Anmerk. 1. DC scheint zwar auf den ersten Anblick nicht perpendikulär (§. 14.) zu seyn; ist es aber dennoch in der That, nähmlich gegen AB; wie man finden wird, wenn man die Zeichnung drehet, bis AB dem Auge horizontal erscheint, da dann DC gleichsam die Zunge des Wagebalkens AB vorstellt. (Vergl. §. 61.)

Anmerk. 2. Die in den Reißzeugen (unnöthiger Weise) befindlichen Setzwagen haben die Figur eines Dreyeckes. Auch zum Gebrauch im Großen werden sie oft so von Holz gemacht. Dieß ändert aber im Wesentlichen Nichts; wie man auch aus der Zeichnung sehen kann, wo die blinden Linien das Dreyeck andeuten.

§. 28. Gebogene Flächen.

Eine Fläche, von welcher kein Theil eben ist, heißt eine gebogene oder krumme Fläche.

Die gebogenen Flächen laufen entweder ganz in sich herum, und haben daher gewissermaßen keine Gränze, ob sie gleich eine bestimmte Größe haben, wie z. B. die Oberfläche einer Kugel. Oder sie sind durch bestimmte Linien begränzt, wie z. B. die Oberfläche einer Halbkugel, oder die Abschnitte einer Walze.

Zusatz. Flächen, wovon ein Theil eben, ein anderer krumm ist, sind nicht Eine Fläche, sondern mehrere.

§. 29. Planimetrie.

Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich mit den ebenen Flächen, und zwar nur mit einerley Ebene beschäftigt, heißt die ebene Geometrie oder Planimetrie, auch Geometrie schlechtweg, im engern Sinn.

§. 30. Stereometrie.

Der Theil aber, der von den Körpern handelt, und zugleich zwey oder mehrere Ebenen, auch selbst gebogene Flächen betrachtet, heißt die körperliche Geometrie oder Stereometrie.

Zusatz. Betrachtet man z. B. an einem Quaderstein nur seine Länge und Breite, so geschieht dieß bloß an Einer Fläche; und das gehört in die ebene Geometrie. Betrachtet man aber auch noch seine Dicke in Verbindung mit seiner Länge und Breite, so hat man mehr als Eine Fläche zum Gegenstand; welches in die Stereometrie gehört.

A.

Planimetrie.

I.

Vom Linien- oder Längenmaße.

§. 31. Messen.

Irgend eine ausgedehnte Größe, z. B. die Länge eines Tisches, die Breite einer Stube, oder die Entfernung eines Ortes vom andern messen, heißt: diese noch unbekannten Größen und Weiten mit einer bereits bekannten vergleichen, und jene nach dieser bestimmen. Alle Völker haben von den Gliedern des Körpers solche bekannte Größen und Weiten hergenommen, nach welchen sie die unbekannten schätzen. Daher die natürlichen Maße nach Daumbreiten, Handbreiten, Spannen, Fußen, Schritten, Klaftern *). Mit Hülfe des sogenannten Augenmaßes schätzt dann schon der Knabe, wie viel Schritt oder Fuß ein Garten oder ein Zimmer lang sey. Begreiflicher Weise können aber dergleichen Bestimmungen nach

*) Ein Längenmaß, so lang als eine Person mit beyden ausgespannten Armen greifen kann.

dem bloßen Augenmaße keine Genauigkeit haben. Deßwegen hat man ein Instrument erdacht, auf welchem diejenige Länge, die das Maß abgeben soll, dargestellt wird, ohne daß jemahls eine merkliche Veränderung damit vorgehen kann.

§. 32. Maßstab.

Ein solches Werkzeug heißt ein Maßstab, weil das Maß gewöhnlich auf einem Stabe von Holz oder Metall verzeichnet wird. Und da ist man nun fast allgemein übereingekommen, die Länge des Fußes dazu anzunehmen. So wie aber der Fuß bey den verschiedenen einzelnen Menschen verschiedentlich-lang ist, so ist auch das Maß nach demselben in den verschiedenen Ländern verschieden; und nicht nur jede europäische Nation, sondern manchmahl sogar eine einzelne Stadt hat ihr besonderes Maß. Indessen läßt sich das Verhältniß der verschiednen Maße zu einander leicht bestimmen. Wenn man z. B. weiß, daß sich der Pariser Fuß zu dem Londoner verhält wie 1000 zu 938 4/10, so kann man in London den Pariser, und in Paris den Londoner Fuß in sehr genauem Maße darstellen.

§. 33. Rheinländisches Maß.

In Deutschland ist das sogenannte Rheinländische Maß das allgemeinste, welches auch das Werkmaß heißt, weil die Handwerker sich desselben bey ihren Arbeiten zu bedienen pflegen.

§. 34. Duodecimal-Maß.

Um Größen zu messen, welche kleiner sind als das Maß eines Fußes, theilt man den Fuß oder Schuh auch noch in Zolle (Maß der Daumbreite), und diese bisweilen noch in Linien oder Strich. Wird der Fuß in 12 (duodecim) Zoll, und jeder Zoll wieder in 12 Strich abgetheilt: so heißt man dieß das zwölftheilige oder Duodecimal-Maß, und dieses ist im gemeinen Leben das gewöhnlichste.

§. 35. Decimal-Maß.

Beym Feldmessen aber ist das geometrische oder zehentheilige (Decimal-) Maß eingeführt, wobey 1 Fuß nur in 10 (decem) Zoll, und 1 Zoll in 10 Strich abgetheilt wird, weil es sich mit diesen Zahlen im Großen besser rechnen läßt. — Im Kleinen ist dagegen besser nach dem Duodecimal-Maß rechnen. Denn da kann man nicht nur die Hälfte, sondern auch das Drittheil und Viertheil von einem Fuß in ganzen Zollen angeben. Wird aber der Fuß in 10 Zoll getheilt, so besteht z. B. sein Drittheil aus 3 1/3 Zoll. Dergleichen Brüche sind für den im Rechnen nicht wohl bewanderten unbequem.

§. 36. Meßschnur und Meßkette.

Zur Ausmessung einer Wiese oder eines Feldes bedient man sich ferner statt eines Maßstabes lieber einer Meßschnur, ein von Hanf auf besondere Art gewundenes und in Oehl getränktes Seil; oder noch besser einer Meßkette von

starkem Drath. Diese werden denn nicht nur in halbe und ganze Fuße, sondern auch noch in Ruthen abgetheilt. Auf eine solche Ruthe gehen 10 Fuß, und diese Fuße und Ruthen sind an der Meßkette durch kleinere und größere Ringe bezeichnet.

§. 37. Rheinländische und geometrische Ruthe.

Die Rheinländische und geometrische Ruthe sind beyde gleich lang, und ihre Benennung deutet bloß auf die verschiedene Eintheilung. Da nun die erstere in 12, die letztere hingegen nur in 10 Fuß abgetheilt wird: so folgt hieraus, daß der Rheinländische Fuß oder sogenannte Werkschuh kleiner sey als der geometrische, nähmlich um 1/6; und so auch natürlicher Weise die Zolle und Strich. Der geometrische Zoll ist beynahe um die Hälfte größer, nähmlich 11/25. (S. §. 45.)

Allein bisweilen läßt man doch den Rheinländischen Fuß wie er ist, und nimmt solcher 10 für eine Ruthe, und theilt den Fuß wieder in 10 Zolle. Alsdann ist aber immer ein solcher Zoll größer als ein Rheinländischer, nähmlich 1/5.

§. 38. Zeichen für die Längenmaße.

Selten schreibt man die Nahmen der Abtheilungen des Maßes mit Buchstaben, sondern braucht dafür der Kürze wegen folgende Zeichen:

° bedeutet Ruthe.
′ — — Fuß oder Schuh.
″ — — Zoll.
‴ — — Linie oder Strich.

§. 39. Zeichen der Gleichheit.

Das Zeichen (=) bedeutet: äqual, d. h. gleich. Z. B. 10′ Decim. M. = 1° Decim. M. heißt: 10 Fuß Decim. Maß sind äqual einer Ruthe Decim. Maß, oder sind so viel als 1 Ruthe. Oder: 12″ Duodec. M. = 1′ Duodec. M. heißt: 12 Zoll Duodec. Maß sind äqual einem Schuh Duodec. M. oder sind so viel als 1 Schuh. U. s. w.

§. 40. Weitere Erklärung des Decimal-Maßes.

Da nach dem geometrischen oder Decimal-Maße jede Ruthe 10 Fuß, jeder Fuß 10 Zoll, und jeder Zoll 10 Linien hält: so muß hiernach jede Ruthe aus 100 Zollen, d. i. zehnmahl so viel Zollen als Fußen; und ferner jede Ruthe aus 1000 Linien, d. i. zehnmahl soviel Linien als Zollen bestehen.

Umgekehrt müssen je 10 Linien einen Zoll; und 10 mahl so viel, oder 100 Linien, einen Fuß; und wiederum 10 mahl so viel, oder 1000 Linien, eine Ruthe ausmachen.

§. 41. Fortsetzung.

Die Summe von 1111 Linien besteht demzufolge, von der Rechten nach der Linken ge esen

1.) aus 1 Linie;

2.) aus 10 Linien, oder 1 Zoll;

3.) aus 100 Linien, oder 10 Zollen, oder 1 Fuß;

4.) aus 1000 Linien, oder 100 Zollen, oder 10 Fußen, oder 1 Ruthe.

Folglich sind 1111''' = 1°1'1''1'''.

Oder: 54769''' = 54°7'6''9''', d. h. 54769 Linien enthalten 54 Ruthen, und noch 7 Fuß, und ferner noch 6 Zoll, und endlich noch 9 Linien.

§. 42. Zeichen der Addition.

Dieses und pflegt man ebenfalls durch ein bequemes Zeichen (+) auszudrücken, welches das Plus- (Mehr-) Zeichen, oder das Zusatz-Zeichen genannt wird, weil es anzeigt, daß etwas hinzugesetzt worden. Man kann alsdann schreiben: 1' Decim. M. = 1 + 1/5' Duodec. M. Uebrigens liest man dieß Zeichen immer: plus.

§. 43. Zeichen der Subtraction.

Dieses ist ein bloßer Querstrich (—), und wird minus (weniger) gelesen. Z. B. 1' Duodec. M. ist = 1' — 1/6 Decim. M. heißt: 1 Fuß Duodec. M. ist äqual 1 Fuß minus 1/6 Decim. M. d. i. weniger 1/6, oder 1/6 abgezogen.

§. 44. Vergleichung des Decimal- und Duodecimal-Maßes.

Einerley Ruthe hält:

10 Decim. Fuß, und 12 Duodec. Fuß; also

10 mahl 10, d. i. 100 Decim. Zoll, und 12 mahl 12, d. i. 144 Duodec. Zoll; und ferner

10 mahl 100, d. i. 1000 Decim. Linien, und 12 mahl 144, d. i. 1728 Duodec. Zoll.

§. 45. Fortsetzung.

Da nun 10 Decim. Fuß gleich sind 12 Duodec. Fußen: so ist also 1 Decim. Fuß = 12/10 oder 6/5 d. i. 1 1/5 Duodec. Fuß.

Und eben so ist 1 Decim. Zoll = 144/100 oder 36/25, d. i. 1 11/25 Duodec. Zoll.

Und endlich 1 Decim. Linie = 1728/1000 oder 216/125, d. i. 1 91/125 Duodec. Linie.

Umgekehrt: da 12 Duodec. Fuß = 10 Decim. Fuß sind, so muß 1 Duodec. Fuß = 10/12 oder 5/6 Decim. Fuß seyn.

Ferner muß ein Duodec. Zoll = 100/144 oder 25/36 Decim. Zoll, —

Und 1 Duodec. Linie = 1000/1728 oder 125/216 Decim. Linie seyn.

§. 46. Fortsetzung.

Frage: Wie viel sind 14° 9′ Decim. Maß in Duodec. Maß?

Antwort: Da 1 Ruthe Decim. M. 10 Fuß hat, so geben folglich 14 solcher Ruthen 14 mahl 10, d. i. 140 Fuß; und dazu noch die obigen 9 Fuß, macht zusammen 149 Decim. Fuß. Und da ferner 1 Decim. Fuß gerade 1 1/5 Duodec. Fuß hält (§. 45), so hat man die Zahl 149

1.) 1 mahl zu nehmen, gibt	149
2.) noch 1/5 mahl zu nehmen, gibt	29 4/5
Beydes zusammen gibt	178 4/5 Duodec. Fuß.

Diese 4/5 Duodec. Fuß geben 12 mahl so viel in Zollen, also 48/5, d. i. 9 3/5 Duodec. Zoll. Und 3/5 Duodec. Zoll geben wiederum 12 mahl so viel in Linien, also 36/5, d. i. 7 1/5 Duodec. Linien.

Demnach sind 149′ Decim. M. = 178′ 9″ 7 1/5‴ Duodec. M.

§. 47. Fortsetzung.

Frage: Wie viel geben 7′ 11″ Duodec. M. in Decim. Maß?

Antwort: Da ein Fuß Duodec. M. 12 Zoll hat: so geben 7 solcher Fuß 7 mahl 12, d. i. 84 Zoll, und dazu noch die obigen 11 Zoll, macht zusammen 95 Duodec. Zoll. Da nun 1 Duodec. Zoll 25/36 Decim. Zoll hält: so müssen alle 95 gerade 95 mahl 25/36, d. i. 2375/36 oder 65 35/36 Decim. Zoll halten.

Im Decim. Maß hält nun dieser 35/36 Zoll zehnmal mehr in Linien, folglich 350/36 oder 9 13/18 Linie.

Demnach sind 95″ Duodec. M. = 65″ 9 13/18‴ Decim. Maß.

Zusatz. Mit Fleiß ist man bey diesem Reduciren etwas umständlich verfahren, um den Anfänger den Grund deutlicher einsehen zu lassen. Sonst lassen sich dergleichen Reductionen ganz nach der Regel de Tri machen. Z. B. um 149 Decimal-Fuß (s. §. 46.) auf Duodecimal-Maß zu bringen, rechne man: 10 Decim. F. sind 12 Duodec. F., also 149 Decim. F.? — Oder (s. §. 47.): 144 Duodecimal-Zoll sind 100 Decim. Zoll, also 95 Duodec. Zoll? U. s. w.

Die Linie
10 oder 12 Th
und mit ('''')
Decim. M. 1000
gehen. Die gew
Auge bey Abzählun
lich seyn, wegen de
len müßten. Man
wodurch dieser Unbeq
in der angeführten Zei

Ueber AB sind näh
nien) gezogen, die alle g
Die zwischen AC stehend
nien, deren oberste eben
abgetheilt ist. DE ist ein
vorausgesetzt, daß CE gerad
DE nun, als ein Theil de
10 Scrupel. Hingegen schne
EB auf der 9 Querlinie g
7ten, 6ten ie 8, 7, 6
1ten endl Scrupel ab

§. brauch de

Fuße und Zolle in der Zeichnung sind 100 Mahl verjüngte Ruthen, Fuße und Zolle.

Zusatz. Der sogenannte verjüngte Maßstab heißt auch in tausendtheiliger Maßstab. Denn wenn man in ichn. 14, von B gegen die rechte Hand zu, 10 Theile wie G absteckte: so bekäme man eine Länge, von welcher die ile BG u. s. w. Zehntheile, die Theile auf AB, 2, 2—3 u. s. w. Hunderttheile, und die Quer- hen zwischen DB und EB Tausendtheile wären.

nmerk. Bey einer jeden Zeichnung nach dem verjüng- aßstabe muß angegeben werden, entweder: um wie Mahl das ordentliche natürliche Maß sey verjüngt wor- der man muß den willkührlich angenommenen mit beyzeichnen.

Dreyerley andere Gattungen verjüngter Maßstäbe.

Zeichnung 15. 16. 17.

n. 15.

B sey eine Ruthe: so sind die Querlinien zwi- d BC die einzelnen Fuße; und zwar in der B nach CD herauf gerechnet.

16.

CD ist bey 5 halbirt, und es sind A5 und so ist, wenn CD eine Ruthe vorstellt, D5 = 1/2 Ruthe = 5 Fuß. Ferner ist, weil GD5 gleiche Theile abgesteckt sind, d.

§. 48. Scrupelmaß.

Zeichnung 14.

Die Linie oder der Strich wird oft gleichfalls noch in 10 oder 12 Theile abgetheilt, die man Scrupel nennt, und mit ('''') bezeichnet, und deren also auf eine Ruthe Decim. M. 10000, auf eine Ruthe Duodec. M. aber 20736 gehen. Die gewöhnliche Theilungsart würde jedoch dem Auge bey Abzählung dieser kleinen Theilchen sehr beschwerlich seyn, wegen der Nähe, in die die Theilungspuncte fallen müßten. Man hat daher eine Einrichtung erfunden, wodurch dieser Unbequemlichkeit abgeholfen wird, und die in der angeführten Zeichnung zu sehen ist.

Ueber AB sind nähmlich 10 Querlinien (Transversal-Linien) gezogen, die alle gleichweit von einander entfernt sind. Die zwischen AC stehenden Ziffern bezeichnen diese Querlinien, deren oberste eben so wie AB in 10 gleiche Theile abgetheilt ist. DE ist ein solches Zehntel, also ein Strich, vorausgesetzt, daß CE gerade einen Zoll hält. Jener Strich DE nun, als ein Theil der 10ten Querlinie, hält gerade 10 Scrupel. Hingegen schneiden die beyden Linien DB und EB auf der 9ten Querlinie gerade 9 Scrupel, auf der 8ten, 7ten, 6ten Querlinie 8, 7, 6 Scrupel, u. s. w.; auf der 1ten endlich nur 1 Scrupel ab.

§. 49. Gebrauch des Scrupelmaßes.

Zeichnung 14.

Wollte man z. B. eine Linie von 6 Strich 4 Scrupel Länge abstecken: so suche man zuerst zwischen AC diejenige

Querlinie, welche mit 4 bezeichnet ist, und fahre auf derselben fort, nach der rechten Hand zu, so findet man zwischen DB und EB (nach §. 48.) die gesuchten 4''''. Alsdann fahre man auf derselben Querlinie wieder zurück, bis man auf diejenige von den schief in die Höhe stehenden Linien kommt, welche unten auf der Querlinie AB mit 6 bezeichnet ist: so hat man zu obigen 4'''' auch noch 6'''.

Oder wollte man eine Linie von 1 Zoll, 7 Strich und 8 Scrupel abstecken: so suche man wieder zuerst zwischen AC diejenige Querlinie, welche mit 8 bezeichnet ist; fahre auf derselben nach der Rechten zu fort bis in FG. Hier setze man den einen Schenkel des Zirkels ein, und öffne den andern bis zu demjenigen Punct zurück, wo die mit 7 bezeichnete schiefstehende Linie die 8te Querlinie schneidet: so hat man zwischen dem Zirkel die verlangte Länge von 1'' 7''' 8'''.

Anmerk. Die starken Puncte auf den Linien zeigen zu mehrerer Verdeutlichung die Längen an, welche nach Obigem abgesteckt werden sollten.

Zusatz. Um einen Scrupelstab für das Duodecimal-Maß zu verfertigen, braucht man nur überall, wo sonst 10 Theile angenommen worden sind, deren 12 zu nehmen.

§. 50. Verjüngter Maßstab.

Wenn man ein Feld, eine Wiese, einen Garten ausgemessen hat, nnd nun eine Zeichnung davon entwerfen will: so versteht es sich von selbst, daß man die Fuße, geschweige denn die Ruthen nicht in ihrer natürlichen Größe auf's Pa-

pier tragen kann. Man macht sich daher einen willkührlich verkleinerten Maßstab, je nach der beabsichtigten Größe der Zeichnung; d. h. man stellt z. B. eine Ruthe durch eine Linie vor, welche etwa so lang als dieses Blatt ist, oder auch nur halb so lang, oder ein Drittheil, Viertheil so lang, u. s. w. Eine solche, willkührlich als eine Ruthe lang angenommene Linie theilt man dann ferner in 10 oder 12 gleiche Theile, welche Fuße vorstellen, und von diesen stellt der 10te oder 12te Theil hinwiederum einen Zoll vor. Und diese letztere Abtheilung wird auf eben die Art gemacht, wie die der Scrupel auf den Scrupelstäben.

Da man sich dieser Scrupelstäbe zu gleichem Zwecke bedienen kann, indem man mit Hülfe derselben eine Linie, die in der Natur eine Ruthe lang ist, auf dem Papiere nur einen Zoll lang; die, welche einen Fuß lang, nur einen Strich groß; und den Zoll nur so groß als einen Scrupel macht: so hat man denjenigen Maßstäben, worauf ein Scrupelmaß verzeichnet ist, und die man daher eigentlich Scrupelstäbe nennen sollte, allgemein den Namen eines verjüngten Maßstabes beygelegt.

Allerdings hat man, wenn man eine Ruthe auf dem Papiere nur einen Zoll, einen Fuß nur einen Strich, und einen Zoll nur einen Scrupel groß macht, die ordentliche natürliche Ruthe, so wie auch den Fuß und Zoll um 100 Mahl verkleinert, indem 1 Ruthe (Decim. M.) 100 Zoll, 1 Fuß 100 Strich, und 1 Zoll 100 Scrupel hat; also nach einem 100 Mahl verkleinerten, oder, wie man zu sagen pflegt, verjüngten Maße gezeichnet, und die Ruthen,

Fuße und Zolle in der Zeichnung sind 100 Mahl verjüngte Ruthen, Fuße und Zolle.

Zusatz. Der sogenannte verjüngte Maßstab heißt auch ein tausendtheiliger Maßstab. Denn wenn man in Zeichn. 14, von B gegen die rechte Hand zu, 10 Theile wie BG absteckte: so bekäme man eine Länge, von welcher die Theile BG u. s. w. Zehntheile, die Theile auf AB, 1—2, 2—3 u. s. w. Hunderttheile, und die Querstückchen zwischen DB und EB Tausendtheile wären.

Anmerk. Bey einer jeden Zeichnung nach dem verjüngten Maßstabe muß angegeben werden, entweder: um wie viel Mahl das ordentliche natürliche Maß sey verjüngt worden; oder man muß den willkührlich angenommenen Maßstab mit beyzeichnen.

§. 51. Dreyerley andere Gattungen verjüngter Maßstäbe.

Zeichnung 15. 16. 17.

1.) Zeichn. 15.

Gesetzt AB sey eine Ruthe: so sind die Querlinien zwischen BD und BC die einzelnen Fuße; und zwar in der Ordnung von B nach CD herauf gerechnet.

2.) Zeichn. 16.

Die Linie CD ist bey 5 halbirt, und es sind A5 und B5 gezogen; also ist, wenn CD eine Ruthe vorstellt, D5 = 1/2 DC = 1/2 Ruthe = 5 Fuß. Ferner ist, weil zwischen AB und CD 5 gleiche Theile abgesteckt sind, d.

= 1/5 D5 = 1/5 . 5 Fuß = 1 Fuß. Aus dem gleichen Grunde ist c2 = 2 Fuß, b3 = 3 Fuß, u. s. w.

3.) Zeichn. 17.

Hier findet man Sechzehntel. AB ist = 16/16, d. i. ein Ganzes. B8 = 8/16, d. i. die Hälfte. D4 = 4/16, d. i. ein Viertheil. D12 = 12/16, d. i. drey Viertheile. b6 = 6/16, a11 = 11/16, u. s. w.

II.

Von den Grundsätzen.

---

§. 52. Lehrsätze und Grundsätze.

Die meisten Sätze, welche in der Geometrie vorkommen, nimmt man nicht bloß auf Treu und Glauben an, sondern man fordert einen Beweis dafür. Allein es gibt auch einige, deren Wahrheit sogleich ohne weitern Beweis erkannt wird, sobald man nur die Worte versteht. Diese heißen Grundsätze. Jene aber, die erst noch bewiesen werden müssen, d. h. deren Wahrheit erst aus andern bereits erkannten Wahrheiten hergeleitet werden muß, nennt man Lehrsätze. Inzwischen werden wir im Folgenden bey einigen Lehrsätzen den Beweis schuldig bleiben, weil er für Anfänger zu schwer zu fassen wäre. Von den Grundsätzen merke man sich vorläufig nachstehende, auf die wir manchmal zurückkommen, und uns auf sie beziehen werden.

§. 53. Acht allgemeine Grundsätze.

1.) Das Ganze ist größer als sein Theil.

2.) Die Hälften von einem und demselben Ganzen sind einander gleich.

3.) Die Doppelten von einem und demselben sind einander gleich.

4.) Zwey Größen A und B, die einer dritten C gleich sind, sind sich selbst gleich.

Ist A = C und B = C, so ist A = B.

Das Nähmliche gilt auch von mehreren Größen, die einer und derselben gleich sind.

5.) Zu Gleichem Gleiches addirt gibt gleiche Summen.

Ist A = B, so ist A + C = B + C.

6.) Von Gleichem Gleiches subtrahirt gibt gleiche Reste.

Ist A = B, so ist A — C = B — C.

7. Zu Ungleichem Gleiches addirt gibt ungleiche Summen.

Ist A größer als B, so ist A + C größer als B + C.

8.) Von Ungleichem Gleiches subtrahirt gibt ungleiche Reste.

Ist A größer als B, so ist A — C größer als B — C.

Anmerk. Die Grundsätze 4 — 8 versinnlicht man am besten durch gleiche und ungleiche Würfel, oder andere Körper, die mit den oben gebrauchten Buchstaben bezeichnet werden.

III.

Von den Winkeln.

§. 54. Neigung.

Zeichnung 18.

Wenn zwey gerade Linien AB und ED einander immer näher und näher kommen, so sagt man: sie haben eine Neigung gegen einander. Werden sie so weit verlängert, daß sie endlich in einem Punct C zusammenstoßen, so machen sie einen Winkel.

§. 55. Winkel, Scheitel, Schenkel.

Zeichnung 18.

Ein Winkel ist also eine Neigung zweyer Linien, die nur Einen gemeinschaftlichen Punct haben (in welchem sie sich berühren).

Dieser gemeinschaftliche Punct C, welcher die Spitze des Winkels ist, heißt der Scheitel, oder Scheitelpunct desselben; und die beyden Linien ABC und EDC werden seine Schenkel genannt, welche den Winkel bilden.

Das Zeichen des Winkels ist (∠).

Anmerk. Bezeichnet man einen Winkel mit 3 Buchstaben, so muß derjenige, der den Scheitel bezeichnet, jederzeit in der Mitte stehen.

Zusatz. Da ein Zirkel (das Instrument), wenn man

ihn öffnet, durch seine beyden Füße einen Winkel bildet, so nennt man dieselben auch die Schenkel des Zirkels.

§. 56. Deckung der Winkel.

Zeichnung 19. 20. 21.

Wenn man einen auf Papier gezeichneten Winkel, z. B. acb Zeichn. 19. ausschnitte, und dieser ausgeschnittene Winkel paßte so genau auf einen andern gezeichneten Winkel ACB Zeichn. 20., wie es in Zeichn. 21. vorgestellt ist; so daß der Scheitel c gerade auf den Scheitel C fällt, und die Schenkel ac und bc gerade auf die Schenkel AC und BC fallen, so sagt man: daß die beyden Winkel einander decken; wenn gleich die Schenkel des einen länger sind als die des andern.

Denn die wahre Größe eines Winkels besteht in der Größe der Neigung seiner Schenkel gegen einander, nicht in der Länge derselben; und diese Neigung bleibt, wie der Augenschein lehrt, die gleiche, man mag die Schenkel noch so sehr verlängern oder verkürzen.

Zwey Winkel decken also einander, wenn man sie dergestalt auf einander legen kann, daß ihre Scheitel und ihre Schenkel in allen Puncten auf einander fallen.

§. 57. Grundsatz.

Winkel, die einander decken, sind einander gleich.

Und:

Winkel, die einander nicht decken können, sind einander nicht gleich.

§. 58. Fortsetzung.

Zeichnung 22. 23. 24.

Der Winkel acb Zeichn. 22. ist kleiner als der ACB Zeichn. 23. Denn der erstere kann in den letztern also hineingelegt werden, daß (s. Zeichn. 24.) sein Scheitel c und sein einer Schenkel bc genau auf des letztern Scheitel C und auf den Schenkel BC paßt; aber dann bleibt noch zwischen dem Schenkel AC und dem Schenkel ac der Raum x übrig. Also ist der Winkel ACB offenbar um den Raum oder Winkel x größer als der Winkel acb.

§. 59. Nebenwinkel.

Zeichnung 25.

Wenn man den einen Schenkel BC eines Winkels x nach D verlängert: so entsteht zwischen der Verlängerung CD und dem andern Schenkel CA noch ein Winkel y, welcher neben dem Winkel x liegt, und dessen Nebenwinkel genannt wird. Umgekehrt heißt auch x eben so der Nebenwinkel von y, weil durch Verlängerung des Schenkels DC nach B der Winkel x auf eben die Weise neben y entstehen würde, als y neben x entstand.

Zwey Winkel also (x und y), welche einen gemeinschaftlichen Schenkel (CA) haben, und deren beyde andere Schenkel (CB und CD) in einer geraden Linie nach entgegengesetzter Richtung liegen, heißen Nebenwinkel.

§. 60. Scheitelwinkel.

Zeichnung 26.

Wenn man beyde Schenkel eines Winkels, z. B. die Schenkel AC und BC des Winkels x über den Scheitelpunct C hinaus verlängert: so entstehen dadurch 4 Winkel, wovon allemahl diejenigen zwey, welche ihre Scheitel gegen einander kehren, Scheitel- oder Vertical-Winkel genannt werden.

Zwey Winkel also (x und y, so wie C und z) heißen Scheitelwinkel, wenn die Schenkel des einen die rückwärts verlängerten Schenkel des andern sind.

§. 61. Rechte Winkel.

Zeichnung 25, 13.

Bereits in §. 27. bey Gelegenheit der Setzwage, ist ein Wink gegeben worden, daß in der Geometrie der Ausdruck: perpendikulär, noch in einem weitern Sinne genommen werde, als in §. 14. gesagt wurde; nähmlich um das Verhältniß der Richtung zweyer gerader Linien gegen einander zu bezeichnen. Eine Linie steht auf der andern perpendikulär, wenn sie mit derselben zwey gleiche Nebenwinkel bildet, wie AC auf DB Zeichn. 25. oder auch wie DC auf AB Zeichn. 13.

Ein rechter Winkel (ACB oder DCB) ist dann ferner ein solcher Winkel, der einen ihm gleichen Nebenwinkel (ACD oder DCA) hat, oder doch haben könnte.

Das Zeichen eines rechten Winkels ist (R).

Zusatz. Eine geometrisch perpendikuläre Linie steht daher nicht auf jeder Horizontallinie lothrecht. In Zeichn. 13. ist DC geometrisch perpendikulär gegen AB. Denkt man sich aber DC in jener Richtung auf der Horizontallinie EF, so ist sie offenbar nicht perpendikulär; DK hingegen ist auf EF sowohl im engern (§. 14.) als weitern (§. 61.) Sinne senkrecht.

§. 62. Grundsatz.

Alle rechte Winkel sind einander gleich — denn sie decken einander.

§. 63. Winkelmaß.

Zeichnung 4.

Ein allgemein bekanntes Instrument ist das Winkelmaß (Winkelhaken, Winkeleisen), welches nichts anders als das Maß eines rechten Winkels, und gewöhnlich von Eisen gemacht ist. Sein Gebrauch ist für Zimmerleute, Maurer, Tischler u. s. w. sehr nützlich und wichtig, um dadurch zu erfahren, ob z. B. ein Fenster, ein Tisch, eine Thüre, eine Mauer u. dgl. m. rechtwinkelig sey oder nicht. Auch in den meisten Reißzeugen pflegt eines zu seyn; und ob man wohl auf eine eigentlich geometrische Methode rechte Winkel bloß durch Zirkel und Lineal zeichnen kann, so ist doch das Winkelmaß zur Verzeichnung derselben, so wie zur Errichtung perpendikulärer Linien nicht wohl entbehrlich, wenn man geschwind zu Werke gehen will. Hat

man aber ein hölzernes Dreyeck (s. §. 102.) so braucht man das Winkelmaß nicht, indem zwey Seiten von jenem gleichfalls einen rechten Winkel bilden.

Zusatz. Um zu erfahren, ob ein Winkelmaß richtig sey, beschreibe man auf einem Reißbrett, oder noch besser auf einer ebenen Kupferplatte einen Kreis, ziehe durch desselben Mittelpunct C eine beliebige Linie ACB. Aus irgend einem Punct E der Kreislinie ziehe man nach A und B zwey gerade Linien EA und EB. Der dadurch entstehende Winkel r ist ein rechter, wovon der Grund §. 121. angegeben ist. An einen solchen rechten Winkel lege man das Winkelmaß, das genau anpassen muß, wenn es richtig ist.

§. 64. Schiefe Winkel.

Zeichnung 26.

Jeder andere Winkel, der kein rechter ist, wie z. B. ACB oder Azb, heißt schief.

§. 65. Spitze Winkel.

Zeichnung 26.

Ein schiefer Winkel ACB, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitz.

§. 66. Stumpfe Winkel.

Zeichnung 26.

Ein schiefer Winkel Azb, der größer ist als ein rechter, heißt stumpf.

IV.

Vom Kreise.

§. 67. Kreis.

Zeichnung 4.

Die Figur, welche daraus entsteht, daß eine gerade Linie CB sich rings um ihren Anfangspunct C dreht, heißt ein Kreis; worunter also derjenige Raum, oder diejenige Fläche zu verstehen ist, welche von der Kreislinie begränzt oder umschlossen wird.

Anmerk. Im gemeinen Leben braucht man am gewöhnlichsten das Wort Zirkel, und benennt damit nicht nur dasjenige Instrument, womit man eine Kreislinie beschreibt; sondern auch theils diese Kreislinie selbst, theils die Fläche, welche von derselben umschlossen wird. Man muß aber, um nicht Begriffe zu verwirren, und um Mißverständnisse zu vermeiden, sich hüten, verschiedenartige Dinge mit einerley Nahmen zu bezeichnen. Inzwischen braucht man doch das Wort Kreis sowohl für die Linie als für die Fläche.

§. 68. Peripherie.

Zeichnung 4.

Die Begränzung eines Kreises heißt des Kreises Umfang, oder die Peripherie, d. i. Umkreis.

§. 69. Centrum.

Zeichnung 4.

Der Punct C, von welchem aus der Kreis beschrieben ist, und von welchem alle Puncte der Peripherie gleich weit entfernt sind, heißt des Kreises Mittelpunct, oder das Centrum.

§. 70. Radius.

Zeichnung 4.

Diejenige gerade Linie CB, durch deren Umdrehung um ihren einen Endpunct C ein Kreis beschrieben wird, heißt des Kreises Halbmesser, oder der Radius.

Zusatz. Nicht nur CB, sondern jede gerade Linie, z. B. CF, CA, die man von dem Mittelpunct eines Kreises bis zu einem beliebigen Puncte seiner Peripherie zieht, ist ein Radius.

§. 71. Grundsatz.

Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich.

Denn sie sind alle gleich groß, weil sie alle einen und denselben Anfangspunct, nähmlich das Centrum des Kreises haben, von welchem alle Puncte der Peripherie gleich weit entfernt sind (§. 69.). Daher sind auch alle Speichen an einem Wagenrade, so wie alle Arme an einem Mühlrade einander gleich, weil sie die Halbmesser derselben ausmachen.

§. 72. Folgerung.

Zeichnung 27.

Aus den vorigen §§. folgt ferner: daß alle Kreise, die mit gleichen Halbmessern beschrieben werden, einander selbst gleich sind; und umgekehrt sind Kreise von ungleichen Halbmessern einander ungleich.

Zusatz 1. Soll man daher einen Kreis, eine Scheibe, ein Rad od. dgl. eben so groß machen, als andere der Art, so braucht man nur den Halbmesser davon zu wissen, um in Ansehung des Umfangs nicht zu fehlen.

Zusatz 2. Kreise mit ungleichen Halbmessern, wie mit Cf, Ch u. s. w. aber aus einerley Mittelpunct C beschrieben, heißen concentrische Kreise.

Zusatz 3. Kreise schneiden einander, wenn ihre Peripherien zwey Puncte miteinander gemein haben. Zeichn. 11. — Kreise berühren einander, wenn ihre Peripherien in Einem Punct zusammentreffen, da sie sich dann nicht schneiden. Zeichn. 10.

§. 73. Diameter.

Zeichnung 4.

Verdoppelt man einen Halbmesser BC in gerader Fortsetzung nach A, so heißt BCA des Kreises Durchmesser oder Diameter.

Ein Diameter ist also eine gerade Linie, welche von einem Puncte der Peripherie durch das Centrum bis zu einem andern Puncte der Peripherie geht.

§. 74. Grundsatz.

Alle Durchmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich — weil ein jeder aus zwey Halbmessern in gerader Fortsetzung besteht (§. 71.)

§. 75. Halbkreis.

Aus den §§. 69. und 73. folgt: daß der Diameter eines Kreises denselben in zwey gleiche Hälften, oder Halbkreise theilt.

Zusatz. Am augenscheinlichsten kann man sich davon überzeugen, wenn man einen Kreis aus Papier genau ausschneidet, durch denselben einen beliebigen Diameter zieht, und nun genau nach der Richtung des Diameters den Kreis falzet: so werden beyde dadurch entstandene Halbkreise sich in allen Puncten ihrer Gränzlinien berühren, also einander decken, folglich einander gleich seyn.

§. 76. Quadrant.

Zeichnung 25.

Eines Kreises Viertheil, oder ein Viertelkreis BAC heißt ein Quadrant.

Zusatz. Zwey Diameter AE und BD, welche sich also durchschneiden, daß sie zwey Paar gleiche Nebenwinkel machen, theilen einen Kreis in 4 Quadranten.

§. 77. Sehne.

Zeichnung 4.

Jede gerade Linie AE, oder AF, welche von einem

Puncte des Umkreises bis zu einem andern, aber nicht durch den Mittelpunct des Kreises geht, heißt eine Sehne oder Chorde.

§. 78. Bogen.

Zeichnung 4.

Jedes Stück der Peripherie AIF, welches von derselben durch eine Sehne AF abgeschnitten wird, heißt ein Bogen.

Zusatz. Der Mittelpunct eines Bogens ist nicht etwa der Punct, wo der Bogen halbirt wird; sondern derjenige C, von welchem alle Puncte des Bogens gleichweit entfernt sind; also der Mittelpunct des ganzen Umkreises, wovon der Bogen AIF ein Theil ist.

§. 79. Kreisabschnitt.

Zeichnung 4.

Ein Kreisabschnitt oder Segment ist diejenige Fläche AFI, welche von einer Sehne AF, als der Grundlinie des Abschnittes und ihrem Bogen AIF begränzt wird.

Zusatz. Jede Sehne theilet den Kreis in zwey entgegengesetzte ungleiche Abschnitte, wovon derjenige, in welchem des Kreises Mittelpunct liegt, jederzeit der größere ist.

§. 80. Kreisausschnitt.

Zeichnung 4.

Ein Kreisausschnitt oder Sector ist diejenige Fläche CFB, welche von zwey Halbmessern CB und CF, und dem von denselben bespannten Bogen BF begränzt wird.

§. 81. Winkel am Umkreis und im Abschnitt.

Zeichnung 4.

Ein Winkel AHE, der seine Scheitel H am Umkreis hat, heißt der Winkel am Umkreis oder Peripheriewinkel.

Winkel im Abschnitt nennt man einen solchen Winkel AHE auch deßwegen, weil er seinen Scheitel im Bogen eines Abschnittes AEH hat, und mit seinen Schenkeln die Endpuncte der Grundlinie des Abschnitts berührt.

§. 82. Winkel am Mittelpunct.

Zeichnung 4.

Ein Winkel FCB, dessen Scheitel C des Kreises Mittelpunct ist, und dessen Schenkel Halbmesser sind, heißt der Winkel am Mittelpunct.

Zusatz. Von beyden Winkeln sagt man: sie stehen auf dem Bogen, den ihre Schenkel vom Umkreise abschneiden. Z. B. AHE steht auf dem Bogen EHA; FCB auf dem Bogen BF.

---

§. 83. Eintheilung des Kreisumfangs.

Ein jeder Kreisumfang oder Umkreis, er seye so klein oder so groß er immer wolle, wird in 360 gleiche Theile oder Bogen eingetheilt. Ein solcher Theil heißt ein Grad (Gradbogen). Theilt man einen Grad abermahls in 60 gleiche Theile, so nennt man einen jeden solchen Theil eine Minute; und eine Minute läßt sich

nicht nur wieder in 60 Secunden, sondern auch eine Secunde wohl gar noch in 60 Tertien abgetheilt vorstellen.

Die Zeichen dieser Abtheilungen des Umkreises sind folgende:

° bedeutet Grad (nicht nur Ruthe).

′ — — Minute (nicht nur Fuß).

″ — — Secunde (nicht nur Zoll).

‴ — — Tertie (nicht nur Strich).

Anmerk. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß, wenn man von Minuten und Secunden eines Kreisbogens redet, von einem Größenmaße, und nicht von dem bekannten Zeitmaße die Rede sey. Gleichwie, wenn die Entfernung zweyer Oerter von einander durch Stunden angegeben wird, nicht die Stunde, sondern der Weg, der in Zeit einer Stunde zurückgelegt werden kann, gemeint ist.

V.

Vom Maße der Winkel.

---

§. 84. Größe der Winkel.

Zeichnung 27.

Aus der in §. 83. angegebenen Eintheilung des Umkreises ergibt sich ein Verfahren, wornach man die Größe, d. i. die Neigung der Schenkel eines Winkels berechnet. Es

können nähmlich aus dem Scheitelpunct oder der Spitze C des Winkels x, Umkreise beschrieben werden, von welchen alsdann die beyden Schenkel CB und CD ein Stück oder einen Bogen b, oder a, oder c abschneiden. So viel Grade nun auf diese Bogen gehen würden, wenn man die ganzen Umkreise in 360° eintheilte, so viel beträgt die Größe des Winkels x. Gesetzt nun, der Bogen b, oder a, oder c halte 40°, so wäre also der Winkel x ein Winkel von 40°.

Zusatz. Da alle Umkreise, von welcher Größe sie immer seyn mögen, in 360° eingetheilt werden (§. 83.); und die wahre Größe der Winkel in der Größe der Neigung ihrer Schenkel besteht (§. 56.): so bespannt der Winkel x mit Ce und Cf auf b eben so viel Grade, als mit CB und CD auf c.

§. 85. Gradwinkel.

In einem jeden Kreise haben auch 360 gleiche Winkel Platz, oder können doch darin gedacht werden, die alle um Einen Punct, nähmlich um des Kreises Mittelpunct (der also der gemeinschaftliche Scheitel aller ist) herumliegen; so zwar, daß allemahl die zwey nächsten Winkel einen Schenkel gemein haben *), und je zwey Schenkel einen Grad (Gradbogen) am Umkreise abschneiden. Ein solcher Winkel, der innerhalb irgend eines Kreises 360 Mahl um dessen Mittelpunct gelegt werden könnte, heißt ein Gradwinkel.

*) Wie z. B. die Winkel BCD und BCE in Zeichn. 27. den Schenkel BC gemein haben.

§. 86. Fortsetzung.

Zeichnung 27.

Der Winkel x ist ein Winkel von 40°, will demnach so viel sagen:

1.) Die Schenkel des Winkels x bespannen einen Kreisbogen von 40°.

2.) Die Neigung der Schenkel des Winkels x ist so groß, daß in dem Raume (Kreisausschnitt) BCD 40 Gradwinkel Platz haben.

Der Satz: $\angle$ x = 40°, sollte eigentlich auch wirklich so gelesen werden: der Winkel x ist gleich 40 Gradwinkeln; und da bedeutete also das Zeichen (°) einen Winkel, und zwar einen Gradwinkel. Man könnte aber auch sagen: der Winkel x hält 40 Gradbogen. Allein es ist einmahl eingeführt, nicht nur das Wort Grad für beydes, sowohl für Gradbogen als für Gradwinkel *) zu gebrauchen; sondern auch schlechtweg zu sagen: der Winkel, z. B. x ist äqual 40 Grad, oder ist ein Winkel von 40°.

§. 87. Messung eines Winkels.

Zeichnung 27.

Um zu erfahren, wie viel Mahl irgend ein Winkel, z. B. BCD größer sey als ein Gradwinkel, könnte man aus seinem Scheitel C einen Kreis beschreiben, und den einen Schenkel DC in gerader Fortsetzung nach A verlängern,

---

*) Eben so braucht man auch Minuten, Secunden und Terzien sowohl von Bogen als Winkeln.

wodurch man einen Diameter (§. 73.) erhielte, der einen Halbkreis abschneidet (§. 75.). Diesen Halbkreis könnte man ferner, da jeder Umkreis in 360° getheilt wird, in 180° abtheilen. Hierauf hätte man endlich die Grade, welche auf den Bogen fallen, der durch des Winkels Schenkel bespannt wird, zu zählen, welches nach den vorigen §§. die Größe des Winkels BCD angäbe.

Da aber dieß Verfahren sehr mühsam wäre, so hat man ein Instrument erfunden, welches einen Halbkreis vorstellt, der ein für alle Mahl in 180° eingetheilt ist, und womit man alle und jede Winkel auf dem Papier oder auf einer Tafel messen kann.

§. 88. Transporteur.

Zeichnung 28.

Dieses Instrument heißt ein Transporteur. Es befindet sich in allen Reißzeugen gewöhnlich von Messing. Die von reinem weißen Horn aber sind besser, weil sie das Papier nicht so beschmutzen, wie Messing beym hin und her schieben es thut. Für Zeichnungen an der Tafel mit Kreide macht man sich einen von Pappendeckel von verhältnißmäßiger Größe. Und zwar theile man zuerst den Halbkreis in 3 gleiche Theile; jedes Drittel wieder in 3; jeden solchen Theil wieder in 2 Hälften, und jede solche Hälfte endlich in 10 gleiche Theile oder Grade.

Zusatz. Auf kleinen Transporteuren lassen sich außer den ganzen Graden nicht gut weniger als halbe Grade, oder Bogen von 30 Minuten abtheilen.

§. 89. Gebrauch des Transporteurs.

Zeichnung 28.

Die Linie ACB stellt die Grundlinie des Halbkreises vor, d. i. den Diameter des ganzen Kreises, wovon also (§. 73.) jede Hälfte CA und CB ein Radius, und C das Centrum ist. Will man nun einen Winkel, z. B. ACD messen, so lege man den Transporteur dergestalt an und auf denselben, daß ein Radius genau auf einen von beyden Schenkeln (gleichviel welchen), und das Centrum genau auf des Winkels Scheitelpunct fällt. So sieht man nun, daß die Schenkel AC und DC einen Bogen von 40° bespannen; folglich hält der Winkel ACD 40°.

Wäre aber der Winkel BCD zu messen, so würde, da seine Schenkel BC und DC den weit größern Bogen BD bespannen, auf dem Transporteur die größere Zahl gelten, welche über 40 steht, nähmlich 140. Der Winkel BCD wäre demnach ein Winkel von 140°.

Anmerk. Wäre ein Schenkel eines zu messenden Winkels nicht so lang, daß er bis an die Zahlen des Transporteurs reichte, welches die genaue Messung in Etwas hindern würde: so braucht man ihn nur so weit als nöthig zu verlängern, unbeschadet der wahren Größe des Winkels (§. 56.).

Zusatz. Aus den §§. 56. und 83. folgt, daß es vollkommen gleich ist, ob man einen Winkel mit einem kleinen, oder mit einem großen Transporteur messe.

Folgerungen
aus der Lehre vom Maß der Winkel.

---

§. 90. Lehrsatz.

Zeichnung 25. 27.

Zwey Nebenwinkel (x und y) enthalten zusammengenommen 180 Gradwinkel, oder sind = 180°.

Denn wenn man aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte C einen Kreis beschreibt, so wird BD des Kreises Durchmesser, welcher denselben in zwey Halbkreise theilt, wovon jeder 180° hält. Die Schenkel BC und DC der beyden Nebenwinkel x und y bespannen zusammen die 180 Gradbogen des Halbkreises; folglich enthalten die beyden Nebenwinkel 180 Gradwinkel, oder sind = 180°.

Zusatz. Zertheilt man 2 Nebenwinkel in mehrere Winkel, wie z. B. in Zeichn. 27., so enthalten doch alle diese Winkel DCB, BCE, ECA, und wenn deren noch mehr wären, zusammen gleichfalls nur 180 Gradwinkel, weil sie alle einen gemeinschaftlichen Scheitel C haben, und alle an der einen Seite der geraden Linie AD liegen, welche als Durchmesser den Halbkreis halbirt.

§. 91. Lehrsatz.

Zeichnung 26.

Alle Scheitelwinkel sind einander gleich.

Denn da z. B. x und y Scheitelwinkel sind, so ist

eines jeden derselben Nebenwinkel; folglich ist (§. 90.) $x + z = 180°$, und $y + z = 180°$; also $x + z = y + z$. Nimmt man nun von beyden den gleichen Winkel z weg, so bleibt $x = y$, die Scheitelwinkel einander gleich.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, daß C und z einander gleich seyen. Denn da C und z Scheitelwinkel sind, so ist y eines jeden derselben Nebenwinkel, folglich $C + y = 180°$, und $z + y = 180°$; also $C + y = z + y$. Von beyden den gleichen Winkel y abgezogen, bleibt $C = z$.

Zusatz. Bey diesen Beweisen sind die Grundsätze Nro. 4. und 6. §. 53. zum Grunde gelegt. Nach denselben wurde geschlossen:

1.) Da die zwey Größen $x + z$ und $y + z$ beyde der dritten Größe 180° gleich sind, so sind sie sich selbst gleich.

2.) Da $x + z = y + z$ ist, so muß, wenn man von diesen beyden Gleichen das Gleiche z abzieht, der Rest x dem Reste y gleich seyn.

§. 92. Summe der Grade der rechten, spitzen und stumpfen Winkel.

Zeichnung 27.

1.) Da ein rechter Winkel ECA ein solcher ist, der einen ihm gleichen Nebenwinkel hat, oder doch haben könnte (§. 61.), und jede zwey Nebenwinkel $= 180°$ sind (§. 90.): so muß ein rechter Winkel die Hälfte, oder 90 Gradwinkel enthalten, und seine Schenkel einen Bogen von 90°, d. i. den vierten Theil eines Umkreises bespannen. Oder: 1 R ist $= 90°$.

Zusatz 1. Die Summe jeder zwey Nebenwinkel ist demnach = 2 R.

Zusatz 2. Die Winkel, welche verschiedene gerade Linien, wie EC, BC, DC, FC, AC um den Punct C machen, sind zusammen = 4 R.

2.) Ein spitzer Winkel BCD enthält, da er kleiner als ein rechter ist (§. 65.), weniger als 90°.

3.) Ein stumpfer Winkel DCF, enthält, da er größer ist als ein rechter (§. 66.), mehr als 90°.

§. 93. Aufgabe.

Einen Winkel zu machen, der einem gegebenen gleich sey.

Auflösung. Man messe den gegebenen; ziehe hierauf eine gerade Linie; setze auf die in §. 89. beschriebene Weise den Transporteur an; bezeichne die Anzahl der Grade mit einem Punct, und ziehe durch denselben die zweyte gerade Linie gegen den einen Endpunct der erstern.

VI.

Von den Parallel-Linien.

---

§. 94. Grundsatz.

Zwey gerade Linien können nicht mehr als einen einzigen Punct mit einander gemein ha-

den, worin sie, verlängert, einander schneiden.

Denn alle Puncte einer geraden Linie liegen nach einer und derselben Richtung (§. 10.). Sobald daher zwey gerade Linien sich in zwey Puncten berühren, so berühren sie sich auch in allen übrigen, fallen also in einander.

§. 95. Parallel-Linien.

Zeichnung 29, 30.

Zwey oder mehr gerade Linien, AB und CD, oder AB, EF und CD, welche in einerley Ebene liegen, und in derselben, ohne Ende verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen, sondern beständig gleichweit von einander entfernt bleiben, sind parallel oder gleichlaufend, und heißen Parallel-Linien oder Parallelen.

Das Zeichen für parallel ist (||).

§. 96. Convergente und divergente Linien.

Zeichnung 31.

Zwey gerade Linien AB und CD heißen convergente, d. i. zusammenlaufende Linien, weil sie, genugsam verlängert, in der Richtung nach A und C zusammentreffen, und also einen Winkel machen würden. Divergent, d. i. auseinanderfahrend sind dieselben Linien in der Richtung nach B und D.

§. 97. Winkel, die durch Schneidung zweyer geraden Linien von einer dritten entstehen.

Zeichnung 29. 31.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD von einer dritten EF geschnitten werden; so entstehen dadurch 8 Winkel.

1.) Diejenigen, welche innerhalb der beyden erstern Linien liegen, nähmlich o, x, y und u, heißen überhaupt innere Winkel.

a) Von diesen innern Winkeln werden diejenigen zwey, welche an einerley Seite der dritten schneidenden Linie liegen, gleichseitige innere Winkel genannt; x und u ist das eine, o und y das andere Paar.

b) Zwey solche innere Winkel hingegen, welche auf verschiedenen Seiten der dritten schneidenden Linie über zwerch liegen, wie x und y, oder o und u, heißen Wechselwinkel.

2) Die außerhalb der Linien AB und CD liegenden Winkel n und m, s und t, heißen äußere Winkel.

Jeder derselben hat wieder unter den vier innern Winkeln einen ihm gleichliegenden Winkel, der mit ihm nicht nur an einerley Seite der schneidenden Linie liegt, sondern sich auch mit ihm nach einerley Gegend hin öffnet. Die 4 Paar gleichliegende Winkel sind: m und u, x und t; n und y, o und s. — m und u liegen an der rechten Seite von EF, und öffnen sich beyde nach der Ge-

gend von E hin; x und t liegen gleichfalls an der rechten Seite von EF, öffnen sich aber nach der Gegend von F. — n und y öffnen sich nach E; o und s nach F hin, und diese beyde Paaren liegen auf der linken Seite von EF.

§. 98. Grundsatz.

Zeichnung 31.

Wenn zwey gerade Linien (AB und CD) von einer dritten (EF) so geschnitten werden, daß zwey gleichseitige innere Winkel (o und x) zusammen kleiner als zwey rechte sind: so treffen die beyden Linien (AB und CD), wenn sie genugsam verlängert werden, an der Seite zusammen, wo sich die beyden Winkel befinden, die zusammen kleiner als zwey rechte sind.

Daß der Winkel y ein rechter Winkel ist, o hingegen kleiner, lehrt der Augenschein; so wie, daß sich die Linie BA, deren Theil oA den einen Schenkel des Winkels o ausmacht, nach der Linie DC neigt; folglich, gehörig verlängert, mit ihr zusammentreffeu müßte. Wäre aber der Winkel o auch ein rechter, so würde, wie gleichfalls der Augenschein lehrt, der Schenkel Cy, wenn man ihn fortschöbe, dergestalt auf den Schenkel Go fallen, daß sich beyde in allen Puncten berührten, folglich einander niemahls schneiden könnten; also auch die ganze Linie HG sich nie nach der ganzen Linie DC neigen, also auch nie mit ihr zusammentreffeu könnte.

Anmerk. Der obige Satz läßt sich daher als ein Grundsatz annehmen, da man sich von der Wahrheit desselben aus der unmittelbaren Anschauung überzeugen kann. Und weil ferner die folgenden Lehrsätze von den Anfängern leichter verstanden werden, wenn man zuvor diesen als Grundsatz aufstellt: so habe ich um so weniger Bedenken getragen, hierin dem Euclides zu folgen.

§. 99. Lehrsätze.

Zeichnung 29.

Zwey gerade Linien (AB und CD) sind parallel, wenn sie mit einer dritten Linie (EF), von welcher sie geschnitten werden,

1.) entweder zwey gleichseitige innere Winkel (o und y) zusammen zwey rechten —
2.) oder zwey Wechselwinkel (o und n) einander gleich —
3.) oder einen äußern Winkel (n) dem ihm gleichliegenden innern Winkel (y) gleich machen.

1.) Beweis für No. 1. Da die Linien AB und CD, genugsam verlängert, an der Seite von o y zusammentreffen würden, wenn $o + y$ kleiner als 2R wäre (§. 98.), wodurch dann auch $x + u$ nothwendig größer als 2R würde (s. Zeichn. 31.): so können, wenn $o + y$, oder $x + u = 2R$ sind, die Linien AB und CD niemahls zusammentreffen, man mag sie verlängern so weit man will; folglich sind sie parallel (§. 95.).

Anmerk. Wenn in Zeichnung 29. die Linie EF die Linien AB und CD perpendikulär, d. i. unter einem rechten Winkel schnitten, wie es der Fall in Zeichnung 31. bey der Linie CD ist: so würde dadurch offenbar ein jeder von den 8 Winkeln nothwendig ein rechter. Da aber EF in Zeichnung 29. die Linien AB und CD in schiefer Richtung schneidet, so werden dadurch die einen Winkel grösser, die andern dagegen kleiner als 1 R. Weil aber z. B. xF (als Schenkel des Winkels x) augenscheinlich um eben so viel von der perpendikulären Richtung nach C hin abweicht, als uE (als Schenkel des Winkels u) nach der entgegengesetzten Richtung B: so wird dadurch der Winkel x genau um eben so viel größer als ein rechter Winkel, als u kleiner wird. Folglich wenn man das, was x größer ist als 1 R, abzieht, und zu dem, was u kleiner ist, addirt: so sind beyde zusammen = 2 R.

2.) Beweis für No. 2. Wenn o = u ist, so muß, da x + o als Nebenwinkel = 2R ist (§. 90.), auch x + u = 2 R seyn. Nun sind x und u zwey gleichseitige innere Winkel (§. 97.); folglich ist nach No. 1. AB || CD.

3.) Beweis für No. 3. Ist n = y, so muß, da o + n als Nebenwinkel = 2R ist (§. 90.), auch o + y = 2 R, folglich nach No. 1. AB || CD seyn.

§. 100. Fortsetzung.

Zeichnung 29.

Wenn zwey gerade Linien (AB und CD) parallel sind: so machen sie mit einer dritten sie schneidenden Linie (EF) sowohl

1.) zwey gleichseitige innere Winkel (o und y) zusammen zwey rechten — als auch

2.) die Wechselwinkel (o und u, oder x und y) einander — und

3.) einen äußern Winkel (m) dem ihm gleichliegenden innern Winkel (u) gleich.

Denn: wären zwey von den gleichseitigen innern Winkeln kleiner als zwey rechte, und die übrigen genannten Winkel einander ungleich: so müßten die Linien AB und CD zusammenlaufen (§. 98. 99.), und wären demnach nicht parallel, welches dem Angenommenen widerspricht. Daher können die Winkel No. 1. nicht kleiner als zwey rechte, und die Winkel No. 2. und 3. einander nicht ungleich seyn, und sind folglich gleich.

§. 101. Fortsetzung.

Zeichnung 30.

Zwey gerade Linien (AB und CD), welche einer dritten (EF) parallel sind, sind selbst parallel.

GH sey die schneidende Linie: so ist $x = y$, als Wechselwinkel (§. 99.), und $y = u$ als gleichliegende Winkel (§. 99.); folglich $x = u$ als Wechselwinkel, also $AB \parallel CD$ (§. 99.).

§. 102. Aufgaben.

Zeichnung 29. 32.

Parallelen zu ziehen.

1.) In den Reißzeugen befindet sich gemeiniglich das

Parallel-Lineal, welches aber meistentheils keine Genauigkeit gibt, und auch sonst ein ganz überflüssiges Instrument ist.

2.) Bey Zeichnungen auf dem Reißbret oder auf der Tafel mit Kreide bedient man sich auch des Anschlag-Lineals oder der sogenannten Reißschiene. Ein solches Lineal ist an einem Ende mit einem Ansatz versehen, vermittelst dessen man es an den Rand des Reißbretes oder der Tafel anlegen, und längs denselben verschieben kann. Der Ansatz muß eine Breite von wenigstens 5—6 Zoll haben, und die eine Hälfte beweglich und mit einer Schraube versehen seyn, um es in jeder Richtung fest schrauben zu können.

3.) Am besten ist das Dreyeck zu gebrauchen, das in manchen Reißzeugen befindlich ist, und eigentlich von eben dem Holze und eben der Dicke seyn muß, wie das Lineal, mit dem man es zugleich brauchen will. Ob die Seiten desselben vollkommen geradlinig sind, erfährt man auf die nähmlichen Arten, wie beym Lineal (§. 17.). Ob aber der eine Winkel genau ein rechter sey, dieß zu untersuchen mache man es gerade so, wie im Zus. zu §. 63. angegeben ist, wo die Prüfung eines Winkelmaßes beschrieben wurde. Paßt das Dreyeck mit den beyden Seiten, die den rechten Winkel bilden sollen, genau in den verzeichneten hinein, so ist es richtig.

Gesetzt nun, man wollte einer Linie EF in Zeichn. 32. eine andere RS parallel ziehen, und zwar durch den Punct O: so legt man das Dreyeck ABC dergestalt an das Lineal

KL an, wie es in der Zeichnung zu sehen ist, so daß seine längste Seite BC genau in die Linie EF fällt; seine kürzeste Seite AB aber gleichfalls genau an das Lineal KL anschließt. Längs der Seite des Lineales, welches fest und unbeweglich auf das Papier aufgedrückt werden muß, schiebt man das Dreyeck fort, bis es den Punct O berührt, und also in die Lage von abc kommt. Die an der Seite bc gezogene Linie, die man nun nach RS verlängern kann, ist der EF parallel.

Sollte eine Parallel-Linie durch P gezogen werden, wozu aber das Lineal KL nicht lang genug wäre: so drücke man nur das bis in die Lage von abc fortgeschobene Dreyeck fest auf's Papier an, und rücke das Lineal an der Seite ab weiter hinauf, so wird man alsdann auch das Dreyeck längs dem Lineale bis nach P schieben können. — Oder: wenn man die Parallele durch Q ziehen sollte, so würde das Dreyeck nicht ausreichen. In diesem Fall lege man nur das Lineal an die Seite ac, und schiebe dann das Dreyeck längs demselben fort, so wird es mit der Seite bc nach Q kommen.

4.) Aus zwey beliebigen Puncten G und H einer Linie CD in Zeichnung 29. beschriebe man mit gleicher Eröffnung des Zirkels zwey Bogen IK, und ziehe durch deren höchste Puncte, die Linie AB. Diese ist der CD parallel, weil sie von derselben überall gleichweit entfernt ist. Und das ist sie deswegen, weil durch die gleiche Zirkelweite der Punct I eben so weit von G, als der Punct K von H entfernt ist. Und da alle Puncte einer geraden Linie nach einerley Rich-

tung liegen (§. 10.): so müssen, wenn zwey Puncte von AB die Puncte IK berühren, auch alle andern Puncte jener Linie so weit von CD entfernt seyn, als I und K von G und H entfernt sind.

5.) Mit Hülfe des Transporteurs endlich könnte man entweder zwey gleichseitige innere Winkel = 2 R, oder zwey Wechselwinkel einander gleich, oder einen äußern dem ihm gleichliegenden innern Winkel gleich machen. Dieß würde aber eben so weitschweifig als mühsam und unsicher seyn.

Zusatz 1. Parallel werden von den Handwerkern gemacht z. B. die Seiten eines Lineales, die Seiten der Breter zu Tischen und Fußböden; auch die Sprossen in Leitern oder in Fensterrahmen, und die Gleise der Wagenräder sind parallel.

Zusatz 2. Will man zwey Linien von ungleicher Länge, AB und AC (Zeichn. 50.) in gleichviel Theile theilen, nachdem die Theile der Einen, z. B. von AB gegeben sind: so setze man sie unter einem beliebigen Winkel zusammen, verbinde sie durch eine gerade Linie BC, und ziehe dieser parallel so viel andere gerade Linien als Theile gegeben sind, so wird dadurch AC in eben so viele Theile getheilt. Und zwar verhalten sich überdieß die Theile von AC zu AC genau so, wie sich die Theile von AB zu AB verhalten.

VII.

Von den Dreyecken.

§. 103. Entstehung der Dreyecke.

Zeichnung 34.

Wenn man drey Linien dergestalt zusammensetzt, daß sie eine dreyseitige Figur ABC bilden: so nennt man diese Fläche ein Dreyeck oder Triangel.

Zusatz. Die Fläche eines Dreyecks ist entweder eben oder gekrümmt, und so sind auch die Seiten geradlinig oder krummlinig. Wir haben es hier bloß mit ebenen und geradlinigen Dreyecken zu thun, die gewöhnlich schlechtweg Dreyecke genannt werden.

§. 104. Geradliniges ebenes Dreyeck.

Eine von drey geraden Linien begränzte ebene Fläche heißt ein geradliniges ebenes Dreyeck.

Das Zeichen desselben ist ($\triangle$).

§. 105. Stücke eines Dreyecks.

An einem jeden Dreyeck kann man 7 Stücke einzeln betrachten: seine 3 Seiten, seine 3 Winkel, und die Größe seiner Fläche.

§. 106. Verschiedene Arten der Dreyecke.

Die Dreyecke erhalten nach Beschaffenheit ihrer Seiten und Winkel verschiedene Benennungen.

1.) In Rücksicht auf die Seiten heißen sie:

a) Gleichseitig, wenn alle drey Seiten gleich sind. ABC Zeichn. 33.

b) Gleichschenkelig, wenn nur zwey Seiten gleich sind. ABC Zeichn. 34.

c) Ungleichseitig, wenn alle Seiten einander ungleich sind. ABC Zeichn. 35.

2.) In Rücksicht auf die Winkel theilt man sie in

a) Rechtwinkelige, worin einer der Winkel ein Rechter ist. AEB Zeichn. 4.

b) Schiefwinkelige, und zwar

aa) Stumpfwinkelige, worin ein Winkel stumpf ist. ABF Zeichn. 36.

bb) Spitzwinkelige, worin alle drey Winkel spitz sind. ABC Zeichn. 33.

§. 107. Höhe und Grundlinie.

Zeichnung 34. 36.

Die aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Seite senkrecht gefällte Linie CD heißt des Dreyecks Höhe. Die Seite AB aber, worauf der Perpendikel gefällt worden, wird die Grundlinie genannt.

Zusatz. Der Perpendikel von der Spitze eines Dreyecks auf die Grundlinie trifft dieselbe innerhalb des Dreyecks, wenn die Winkel an der Grundlinie spitz sind, wie in Zeich-

nung 34. — außerhalb aber, wenn einer stumpf ist, wie bey dem Dreyeck ABF Zeichn. 36., in welchem Fall die Grundlinie verlängert werden muß, um den Perpendikel FH zu fällen. — In einem rechtwinkeligen Dreyeck gibt bisweilen eine der Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, selbst die Höhe, wie die Seite CA in ABC Zeichn. 43.

§. 108. Katheten und Hypotenuse.

Zeichnung 43.

Die den rechten Winkel einschließenden Seiten eines rechtwinkeligen Dreyecks, also BA und CA werden die Katheten; die dem rechten Winkel gegen über stehende Seite CB aber wird die Hypotenuse genannt.

§. 109. Deckung der Dreyecke.

Wenn zwey Dreyecke so auf einander passen, daß alle Seiten des einen Dreyecks gerade auf die Seite des andern fallen: so sagt man, daß beyde Dreyecke einander decken.

Das Zeichen der Deckung ist ($\cong$).

§. 110. Grundsatz.

Zeichnung 35.

Dreyecke, die einander decken, sind einander gleich.

Zusatz. Dieser Grundsatz schließt die Behauptung in sich: daß, wenn die Dreyecke ABC und abc einander decken, sowohl die Flächen, als auch jede zwey gleichlie-

gende Seiten, und jede zwey gleichliegende Winkel, d. h. diejenigen Seiten und Winkel, die bey der Deckung der beyden Dreyecke gerade auf einander fallen und selbst einander decken würden — einander gleich seyen. Oder: wenn das Dreyeck abc das Dreyeck ABC deckt, so ist

1.) △ abc = △ ABC.
2.) ab = AB.
3.) ac = AC.
4.) bc = BC.
5.) y = x.
6.) s = r.
7.) u = o.

Denn gleiche gerade Linien sowohl als gleiche Winkel decken einander.

§. 111. Lehrsatz.

Zeichnung 35.

Zwey Dreyecke decken einander, wenn zwey Seiten, nebst dem von denselben eingeschlossenen Winkel in dem einen Dreyeck so groß sind, als in dem andern. Also, wenn 1.) ab = AB, 2.) ac = AC, und 3.) y = x ist: so ist △ abc ≅ △ ABC.

Man denke sich beyde Dreyecke auf einander gelegt, daß ab auf AB falle: so fällt, wegen der gleichen Winkel y und x, auch ac auf AC (§. 56. 57.); und wegen der gleichen Größe der Linien, b auf B und c auf C. Da endlich

zwischen den beyden Puncten B und C nur eine einzige gerade Linie Statt findet (§. 11.), so muß auch bc auf BC fallen; folglich deckt das △ abc das △ ABC.

§. 112. Lehrsatz.

Zeichnung 34.

Sind in einem Dreyeck zwey Seiten gleich, so sind auch die gegen über stehenden Winkel gleich. Also, wenn AC = BC ist, so ist r = s.

Man denke sich die Seite AC auf BC gelegt, so fällt, wegen des Angenommenen, BC auf AC, A auf B, B auf A, AB auf sich selbst, und der Winkel r deckt den Winkel s (§. 56. 57.); folglich sind sich beyde Winkel gleich (§. 57.).

Zusatz. Umgekehrt: sind in einem Dreyeck ABC zwey Winkel r und s gleich, so sind auch die gegen über stehenden Seiten AC und BC gleich.

§. 113. Folgerung.

Zeichnung 33. 34.

In einem gleichschenkeligen Dreyeck sind also die Winkel an der Grundlinie gleich.

In einem gleichseitigen aber sind alle Winkel gleich; und ein Dreyeck, das lauter gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

§. 114. Lehrsatz.

Zeichnung 35.

Zwey Dreyecke decken einander, wenn eine

Seite und die beyden daran liegenden Winkel in dem einen Dreyeck so groß sind, als in dem andern. Also, wenn 1.) ab = AB, 2.) y = x, und 3.) u = o ist: so ist △ abc ≌ △ ABC.

Legt man die Dreyecke auf einander, so daß a auf A, b auf B fällt: so fällt auch, wegen angenommener Gleichheit der Winkel, der Schenkel ac auf AC, der Schenkel bc auf BC (§. 57.), und der Durchschnittspunct c auf C; folglich decken sich beyde Dreyecke.

§. 115. Lehrsatz.

Zeichnung 35.

Zwey Dreyecke decken einander, wenn alle drey Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern. Also, wenn 1.) ab = AB, 2.) ac = AC, und 3.) bc = BC ist: so ist △ abc ≌ △ ABC.

Man denke sich ab auf AB gelegt. Da nun ac = AC angenommen ist, so muß c (von ac) nothwendig in einen Punct des mit AC beschriebenen Halbkreises fallen. Und weil auch bc = BC angenommen ist, so muß c (von bc) eben so nothwendig in einen Punct des mit BC beschriebenen Halbkreises fallen. Nun ist aber c die gemeinschaftliche Spitze von ac und bc; folglich muß c auf den Schneidungspunct der beyden Halbkreise, also auf C zu liegen kommen; folglich auch ac auf AC, und bc auf BC, und demnach müssen sich die Dreyecke decken.

§. 116. Dreyerley Arten ein Dreyeck einem andern vollkommen gleich zu machen.

Zeichnung 35.

Aus den obigen Lehrsätzen von der Deckung der Dreyecke ergeben sich folgende Arten ein Dreyeck zu zeichnen, das einem gegebenen vollkommen gleich ist, also sich mit ihm deckt.

1.) Man mache zwey Seiten des zu zeichnenden nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel so groß als in dem gegebenen. (§. 111.).

2.) Oder eine Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln (§. 114.) —

3.) Oder alle drey Seiten so groß wie in dem gegebenen (§. 115.).

Diese letztere Zeichnungsart ist die bequemste und genaueste, und den beyden andern weit vorzuziehen. Man mache irgend eine beliebige Seite, z. B. ab = AB; fasse AC zwischen den Zirkel, und beschreibe aus a einen Bogen (ein Halbkreis ist da unnöthig); hierauf BC, und beschreibe aus b gleichfalls einen Bogen. Aus dem Durchschnittspunct beyder ziehe man endlich ca und cb, so ist das Dreyeck fertig und dem gegebenen gleich. (§. 115.)

§. 117. Summe der Winkel im Dreyeck.

Zeichnung 39.

In jedem Dreyeck sind die drey Winkel zusammen zwey Rechten gleich.

Man ziehe durch C eine Linie parallel mit AB. Da $x = o$ ist, als Wechselwinkel (§. 100), $y = y$, d. i. sich selbst gleich, und $z = p$, als Wechselwinkel: so ist $x + y + z = o + y + p$. Nun ist aber $x + y + z = 180°$, als Nebenwinkel (§. 90.); folglich auch $o + y + p = 180°$ oder 2R.

§. 118. Folgerungen.

1.) Kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten, oder Einen stumpfen Winkel enthalten. Denn so bald Ein Winkel ein rechter ist, so müssen die beyden übrigen zusammen 90° halten; und wenn ein rechtwinkeliges Dreyeck zugleich auch gleichschenkelig ist, so beträgt jeder spitze Winkel die Hälfte eines rechten. Ist aber Ein Winkel stumpf, und hält folglich mehr als 90°, so bleibt für die übrigen noch weniger als 90°; folglich sind sie wieder spitz.

2.) Ist in einem gleichschenkeligen Dreyeck Ein Winkel gegeben, so sind sie alle gegeben. Z. B. es halte der eine Winkel an der Grundlinie 70°, so hält der ihm gegen über stehende gleichfalls 70° (§. 112. 113.), folglich der an der Spitze 40°. Oder ist der Winkel an der Spitze gegeben, und hält etwa 30, so hält jeder an der Grundlinie 75°.

3.) In einem gleichseitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel 2/3 eines rechten, d. i. 60° (§. 113.)

4.) Wenn man in einem Dreyeck Einen Winkel gemessen hat, so weiß man auch die Summen der beyden übrigen.

§. 119. Lehrsatz.

Zeichnung 39.

An jedem Dreyeck (ABC) ist der äußere Winkel (q) an der verlängerten Seite (BA) den beyden innern ihm entgegen liegenden (y und p) zusammen gleich.

Denn: q + o ist = 180°, als Nebenwinkel (§. 90.), und auch p + y + o = 180° (§. 117.); folglich q + o = p + y + o. Zieht man den gleichen Winkel o von beyden ab: so bleibt q = p + y (nach dem Grundsatz Nro. 6. §. 53.), der äußere Winkel den beyden innern entgegen liegenden gleich.

§. 120. Folgerungen aus den beyden vorhergehenden Lehrsätzen, nebst Aufgabe.

Zeichnung 4.

1.) Der Winkel am Umkreis (q) ist halb so groß, als der Winkel am Mittelpunct (x), wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Der Winkel x, als äußerer Winkel an der verlängerten Seite AB des Dreyecks ACF, ist = p + q, als den beyden innern ihm entgegen liegenden (§. 119.). Ferner ist p = q, als Winkel an der Grundlinie des gleichschenkeligen Dreyecks AFC (§. 112. 113.); folglich ist der Winkel am Mittelpunct x = 2q, doppelt so groß als der Winkel am Umkreis, oder letzterer halb so groß als ersterer.

2.) Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter. Denn betrachtet man CA und CB als Schenkel eines

Winkels, so machen sie, da sie zusammen einen Durchmesser bilden, den Winkel C = 180°. Nun bespannt also dieser Winkel am Mittelpunct einen Halbkreis. Der Winkel am Umkreis r aber bespannt gleichfalls einen Halbkreis; folglich ist r = 1/2 C (§. 120.), d. i. = 90°, also ein rechter Winkel.

§. 121. Aufgabe.

Zeichnung 4.

Auf das eine Ende (E) einer geraden Linie (GE) einen Perpendikel (EB) zu errichten.

Auflösung. Man beschreibe aus einem beliebigen Punct C mit dem Halbmesser CE einen Kreis, der also die Linie GE in E berührt, in A aber schneidet. Aus A ziehe man einen Diameter AB. Verbindet man die Puncte B und E durch BE, so ist diese Linie perpendikulär auf GE; denn es entsteht dadurch ein Winkel r, der den Halbkreis AHEB bespannt, folglich ein rechter ist (§. 121.).

Aufgaben, welche mit Hülfe der bisher vorgetragenen Lehrsätze, besonders von der Deckung der Dreyecke aufgelöst werden.

---

§. 122. Aufgabe 1.

Zeichnung 38.

Auf einer geraden Linie (HK), aus einem in

ihr gegebenen Punct G, einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung. Zu beyden Seiten von G schneide man beliebige gleiche Stücke GA und GB ab, beschreibe aus A und B mit gleichen Halbmessern Bogen über AB, und ziehe aus ihrem Schneidungspunct E die Linie EG. Diese steht perpendikulär auf HK.

Denn: zieht man noch AE und BE, so ist, da GA = GB gemacht, und AE = BE, auch EG = EG ist, das △ AGE ≌ △ BGE, also auch x = y (§. 110.), und folglich EG perpendikulär auf HK (§. 61).

§. 123. Aufgabe 2.

Zeichnung 38.

Aus einem beliebigen Punct (E), außerhalb der geraden Linie (HK), auf diese einen Perpendikel zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus E mit einem hinlänglich großen Halbmesser einen Bogen, welcher die Linie HK in A und B schneidet; halbire AB in G, und ziehe EG. Diese ist perpendikulär auf HK.

Denn EA und EB sind gleich, als Halbmesser. EG ist sich selbst gleich, und AG = GB. Folglich ist △ AGE ≌ △ BGE (§. 115.); also auch x = y (§. 110.), und folglich EG senkrecht auf HK (§. 61.).

§. 124. Aufgabe 3.

Zeichnung 38.

Jede gerade Linie zu halbiren.

Auflösung. Ueber und unter AB beschreibe man gleichseitige oder gleichschenkelige Dreyecke *), AEB und AFB, und ziehe EF; diese theilt AB in zwey gleiche Theile.

Denn AE ist = BE, AF = BF (§. 106.), und EF sich selbst gleich: folglich ist das △ AEF ≌ △ BEF (§. 115.). Da nun bey der Deckung G auf sich selbst, und B auf A fällt: so ist GA = GB, folglich die Linie AB in G halbirt.

§. 125. Aufgabe 4.

Zeichnung 38.

Jeden Winkel (DEI) zu halbiren, d. i. in zwey gleiche Winkel zu theilen.

Auflösung. Man fasse auf einem Schenkel ED eine beliebige Länge EA zwischen dem Zirkel, und mache EB = EA. Aus den Puncten A und B beschreibe man mit gleichen Halbmessern zwey Bogen, die sich in F schneiden, und ziehe EF. Diese theilet den Winkel DEI in zwey Winkel o und u, die einander gleich sind.

Denn man ziehe AF und BF, so erhält man die Dreyecke EFA und EFB, welche sich decken (§. 124.); folglich müssen auch die beyden gleichliegenden Winkel o und u ein-

---

*) Auch kann das eine gleichseitig und das andere gleichschenkelig seyn.

ander gleich seyn (§. 110.). Also ist der Winkel DEI halbirt.

Zusatz. Durch dieselbe Linie EF ist auch der Bogen ACB halbirt worden. Und überhaupt wird ein jeder Bogen durch eben die Linie halbirt, welche den Winkel, dessen Schenkel die Bogen bespannen, in zwey andere gleiche zertheilt.

§. 126. Aufgabe 5.

Zeichnung 33.

Einen rechten Winkel (DAB) in drey gleiche Theile zu zertheilen.

Auflösung. Man beschreibe über dem einen Schenkel AB das gleichseitige Dreyeck ABC, so ist der Winkel BAC = 60° oder 2/3 R (§. 118. 3); folglich DAC = 1/3 R. Halbirt man nun BAC auf die vorbeschriebene Weise: so erhält man zwey Winkel jeden = 1/3 R, und also ist der rechte Winkel DAB in drey gleiche Theile getheilt.

§. 127. Aufgabe 6.

Zeichnung 35.

Jeden Winkel einem andern gleich zu machen.

Anflösung. Gesetzt, es solle s = r gemacht werden: so ziehe man aus einem beliebigen Punct des einen Schenkels CA nach einem beliebigen Punct des andern Schenkels CB eine gerade Linie BA, wodurch ein Dreyeck

ABC entsteht. Diesem mache man nun mit Lineal und Zirkel (nach §. 116. 3.) das Dreyeck abc gleich: so muß auch s = r seyn (§. 110.).

§. 128. Aufgabe 7.

Zeichnung 33.

Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Man ziehe nach Belieben eine Sehne BE, halbire sie durch einen Perpendikel DF, der durch den ganzen Kreis geht. Die Mitte von DF ist das gesuchte Centrum.

Wäre dieses nicht in AD, sondern etwa in C: so müßten sich, — da BA = EA gemacht, CA = CA ist, und BC und EC unter dieser Voraussetzung Halbmesser, mithin ebenfalls gleich wären — die Dreyecke ABC und AEC decken (§. 115.); also auch der Winkel CAB = 1R seyn (§. 110.), welches ungereimt ist, da nicht CA sondern DA senkrecht gegen BE ist.

Folglich ist des Kreises Mittelpunct nicht außerhalb, sondern in AD. Und da FD ein Durchmesser ist, so ist er in dessen Mitte.

Zusatz. Auch kann man willkührlich zwey Sehnen BE und GH ziehen, und durch die Perpendikel DF und KI halbiren; wo sich diese schneiden, da ist der gesuchte Mittelpunct.

VIII.

Von den Vierecken, insonderheit den Parallelogrammen.

---

§. 129. Entstehungsart der Vierecke.

Zeichnung 40.

Wenn man vier gerade Linien dergestalt zusammensetzt, daß sie eine vierseitige Figur ABCD bilden: so heißt diese ein Viereck.

§. 130. Verschiedene Arten der Vierecke.

Nun sind aber alle Vierecke

1.) Entweder Parallelogramme, d. h. solche vierseitige Figuren, in welchen jede zwey einander gegen über liegende Seiten parallel sind. Diese sind wiederum

a) Entweder rechtwinkelig (Rechtecke, Rectangel), welche vier rechte Winkel haben. Dazu gehört:

aa) Das Quadrat, welches zugleich vier gleiche Seiten hat. ABFE Zeichn. 40. Das Zeichen des Quadrats ist (□); und für das Quadrat einer Linie (q).

bb) Das längliche Rechteck, oder Oblongum, in welchem nur jede zwey ein-

ander gegen über liegende Seiten gleich sind. ABCD Zeichn. 36.

b) Oder schiefwinkelig, welche vier schiefe Winkel haben. Zu diesen gehört:

aa) Die Raute, oder der Rhombus, welche zugleich vier gleiche Seiten hat und daher auch ein verschobenes Quadrat genannt wird. ABCD Zeichn. 40.

bb) Die längliche Raute, oder der Rhomboid, worin nur jede zwey einander gegen über liegende Seiten gleich sind. ABEF Zeichn. 36.

2.) Oder Trapezien. Ein Trapezium heißt ein jedes Viereck, das nur zwey parallele Seiten hat. Z. B. AGCD, oder BGEF Zeichn. 36.

§. 131. Höhe und Grundlinie.

Zeichnung 36. 40.

Eine, zwischen zwey gegen über stehenden Seiten eines Parallelogramms gegen diese senkrecht gezogene Linie, heißt die Höhe; und die Seite, auf welcher sie senkrecht steht, die Grundlinie des Parallelogramms.

Zusatz. Ist das Parallelogramm schiefwinkelig: so fällt der Perpendikel, welcher die Höhe angiebt, je nachdem der Winkel an der Grundlinie spitz oder stumpf ist, entweder innerhalb, wie GB (Zeichn. 40.); oder außerhalb, wie FH (Zeichn. 36.), in welchem Fall die Grund-

Linie AB gehörig verlängert werden muß. Ist aber das Parallelogramm rechtwinkelig, wie z. B. ABCD Zeichn. 36., so gibt eine der Seiten selbst den Perpendikel, und folglich auch die Höhe.

Anmerk. Der Ausdruck: Grundlinie deutet bey den Figuren nicht allemahl eine auf dem Papier zu unterst liegende Linie, sondern eine jede Linie an, auf welche man die Höhe trägt. So ist (Zeichn. 37.) CB die Grundlinie, OH die Höhe des Dreyecks BCO.

§. 132. Diagonale.

Zeichnung 36.

Eine gerade Linie, welche durch die Ecken eines Parallelogramms gezogen wird, heißt eine Diagonale, oder Diagonal-Linie.

Zusatz. In jedem Parallelogramm finden zwey Diagonalen Statt. Die eine ist CB, oder AF; die andere wäre eine gerade Linie von A nach D, oder von B nach E.

§. 133. Lehrsatz.

Zeichnung 40.

In einem jeden Parallelogramm (ABCD) sind die einander gegen über liegenden Winkel (x und y, o und u) einander gleich.

Da AB || CD ist: so ist $x + o = 2R$, als zwey gleichseitige innere Winkel (§. 100.). Und da ebenfalls AC || BD ist: so ist auch $y + o = 2R$, als zwey gleichseitige innere Winkel; folglich $x + o = y + o$ (nach

Grundsatz 4. §. 53.); also x = y (nach Grundsatz 6. §. 53.).

Anmerk. Der Beweis, daß eben so auch o = u sey, wird auf ähnliche Art geführt.

§. 134. Folgerung.

Zeichnung 40.

Ein Parallelogramm, das Einen rechten Winkel haben soll, muß lauter rechte Winkel haben.

Es sey z. B. o = 1 R, so müßte auch x = 1 R seyn, weil (nach §. 100.) o + x = 2 R seyn muß, wenn CD ‖ AB seyn soll. Nun ist aber ferner dem Winkel o sein gegen über liegender u, und dem Winkel x sein gegen über liegender y gleich (§. 133.): folglich würde, wenn o = 1 R wäre, auch jeder von den drey übrigen Winkeln = 1 R seyn.

§. 135. Lehrsatz.

Zeichnung 37.

Jedes Parallelogramm (DBCE) wird von der Diagonale (BE) in zwey sich deckende Dreyecke getheilt, folglich halbirt.

Denn: da DB ‖ EC, und DE ‖ BC sind, so ist n = o, und r = s (§. 100.). Auch ist BE = BE: folglich das △ DBE ≌ CEB (§. 114.).

Zusatz. Die, durch eine Diagonale entstandenen Dreyecke in einem Quadrat oder in einer Raute, sind zugleich gleichschenkelig.

§. 136. Folgerungen.

1.) In jedem Parallelogramm sind demnach die gegen über stehenden Seiten einander gleich, weil sie gleichliegende Seiten in zwey Dreyecken sind, die sich decken können. Wenn daher in einem Viereck die gegen über stehenden Seiten gleich sind: so ist die Figur ein Parallelogramm.

Zusatz. Hierauf gründet sich unter andern die Einrichtung des Parallel-Lineales. Die Puncte, um welche ein solches Instrument sich verschieben läßt, stellen die vier Eckpuncte eines Parallelogramms vor, dessen gegen über stehende Seiten bey jeder Verschiebung gleich bleiben, weßhalb auch das Parallel-Lineal bey jeder Verschiebung parallel bleiben muß.

2.) Parallelen zwischen Parallelen sind gleich, und Perpendikel zwischen Parallel-Linien sind parallel und gleich.

§. 137. Aufgaben.

1.) Ein Quadrat zu zeichnen. Zeichn. 40.

Zu einem Quadrat braucht nur eine Seite gegeben zu seyn.

An diese, z. B. AB, setze man eine gerade Linie AF senkrecht, und mache sie der AB gleich. Hierauf fasse man AB zwischen den Zirkel, beschreibe mit diesem Halbmesser aus B und F Bogen, und ziehe gegen den Durchschnittspunct derselben die Linien BE und FE.

2.) Eine Raute zu zeichnen. Zeichn. 40.

Zu einer Raute muß eine Seite und ein Winkel gegeben seyn.

Unter dem gegebenen schiefen Winkel o setze man an die gegebene Seite AB eine gleiche AC, und verfahre übrigens wie bei der Verzeichnung eines Quadrates.

3.) Ein Oblongum zu zeichnen. Zeichn. 37.

Ein jedes rechtwinkelige Parallelogramm wird aus zwey gegebenen Seiten, z. B. BD und DE verzeichnet, indem man DE senkrecht an BD setzt; aus B mit dem Halbmesser DE, aus E aber mit dem Halbmesser DB Bogen in C beschreibt, und alsdann BC und EC zieht.

4.) Ein Rhomboid zu zeichnen. Zeichn. 36.

Zu einem schiefwinkeligen Parallelogramm müssen zwey Seiten nebst dem Winkel, den sie einschließen sollen, gegeben seyn.

Alsdann setze man diese Seiten AB und BF unter dem Winkel ABF zusammen, und verfahre wieder auf die oben beschriebene Weise.

5.) Ein Trapezium zu zeichnen. Zeichn. 36.

Hierzu sind vier gegebene Seiten und ein Winkel erforderlich.

Sind z. B. die Seiten AG, GD, DC und CA, nebst dem Winkel CAG gegeben: so wird CA unter diesem Winkel an AG gesetzt. Hierauf beschreibt man aus C mit dem Halbmesser CD, und aus G mit dem Halbmesser GD, nach derjenigen Seite, gegen welche sich der Winkel öffnet — Bogen, gegen deren Durchschnittspunct endlich CD und GD gezogen werden.

Zusatz. Aus der Auflösung der übrigen Aufgaben erhellet von selbst, wie einem gegebenen Parallelogramm oder Trapezium ein anderes gleich gemacht werden kann.

6.) Aus einem Dreyeck ein Parallelogramm zu machen. Zeichn. 36.

Gesetzt, es sey das Dreyeck ABF gegeben: so ziehe man AE || BF, und FE || BA. Die Schneidungspuncte der Linien bestimmen das Parallelogramm (§. 136.).

7.) Ein Quadrat in einen gegebenen Kreis zu beschreiben. Zeichn. 25.

Man ziehe zwey Durchmesser DB und AE unter rechten Winkeln, und verbinde ihre Endpuncte durch gerade Linien: so erhält man das Quadrat DABE.

Denn die beyden, sich rechtwinkelig durchschneidenden Diameter, theilen den Kreis in vier Quadranten (§. 76.); die Schenkel der Winkel bespannen daher vier gleiche Bogen, also auch vier gleiche Sehnen, welche letztere folglich das verlangte Quadrat geben.

Hieraus fließen noch nachstehende Aufgaben und deren Auflösung:

8.) Einen Kreis in ein gegebenes Quadrat zu beschreiben. Zeichn. 25.

Man verbinde die Ecken des Quadrates durch gerade Linien DB und AE. Der Schneidungspunct C derselben gibt den Mittelpunct des Kreises, der in dem Quadrat beschrieben werden soll.

9.) Den Mittelpunct eines Kreises zu finden. Zeichn. 25.

Man beschreibe um denselben ein Quadrat, und zwar so, daß dessen Seiten dicht an dem Kreise anliegen, und jede ihn in Einem Puncte berührt. Die Ecken des Qua-

drates verbinde man hierauf mit geraden Linien, deren Schneidungspunct C das gesuchte Centrum ist.

Anmerk. Eine solche gerade Linie, wie z. B. BE u. s. w., welche den Kreis in Einem Puncte trifft, ohne ihn zu schneiden, heißt eine Tangente (Berührungslinie).

IX.

Von den regulären Vielecken, oder Polygonen.

Anmerk. Eine Figur heißt regulär, wenn ihre Seiten sowohl als Winkel gleich sind. Jede andere geradlinige Figur ist irregulär.

---

§. 138. Polygon.

Zeichnung 45. 47.

Figuren von mehr als vier Seiten, welche von lauter gleichen Sehnen eines Kreises begränzt werden, heißen Polygone; und ein Polygon kann demnach eben sowohl in einen Kreis, als ein Kreis um ein Polygon durch die Spitzen der Winkel oder Ecken, beschrieben werden.

§. 139. Eintheilung der Polygone.

Nach der Anzahl der Seiten und Winkel werden die Polygone in Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke, Vierundsechzigecke u. s. w. eingetheilt.

Mehrere derselben kommen gleichfalls oft im bürgerlichen Leben vor. Manche Gebäude, z. B. Gartenhäuser, auch Säle und Tische haben eine sechs- oder achteckige Figur; ingleichen die Wasserbehältniße der Springbrunnen. Gartenbeete erhalten bisweilen die Form irgend eines Polygons; auch werden manchmahl Bäume in ein Fünf- oder Zeheneck gesetzt. Ferner muß man Polygone in Kreisen verzeichnen können, um bey Zifferblättern die Plätze für die Stundenzahlen zu finden; oder um zu erfahren, wie weit bey Mühl- und Uhrrädern, welche eine gewiße Anzahl von Zähnen bekommen sollen, diese von einander entfernt seyn müßen; indem die Ecken der Polygone die Stellen der Ziffern und Zähne bestimmen.

§. 140. Perimeter.

Zeichnung 45.

Die sämtlichen Seiten eines Polygons *) machen dessen Umfang aus, welcher auch der Perimeter genannt wird.

§. 141. Dreyecke im Polygon.

Zeichnung 45.

Zieht man von den Ecken eines Polygons nach seinem Mittelpunct, welcher zugleich der Mittelpunct des Kreises ist, in oder um den das Polygon beschrieben worden, gerade Linien: so zerfällt dadurch dasselbe in lauter gleich-

*) So wie jeder andern geradlinigen Figur.

schenkelige und gleiche, sich also deckende (§. 110.) Dreyecke, weil diese gerade Linien, wovon je eine für zwey Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite abgibt, lauter Halbmesser, und folglich gleich, — auch alle Seiten des Polygons, als gleiche Sehnen (§. 138.), einander gleich sind. Diese Halbmesser halbiren denn auch die Winkel, welche die Sehnen mit einander machen.

Zusatz. Die Dreyecke im Sechseck, und zwar in diesem allein, sind gleichseitig, wovon der Grund §. 147. b.) angegeben ist.

§. 142. Centriwinkel.

Zeichnung 45.

Der Winkel am Mittelpunct, z. B. AGB, welcher mit seinen Schenkeln GA und GB eine Seite AB des Polygons bespannt, heißt der Centriwinkel.

§. 143. Polygonwinkel.

Zeichnung 45.

Derjenige Winkel aber, z. B. ABC, den zwey Seiten AB und CB des Polygons mit einander machen, heißt der Polygonwinkel.

§. 144. Lehrsatz.

Zeichnung 45.

Centriwinkel und Polygonwinkel (in jedem regulären Vieleck) sind zusammen = 2R.

Denn in jedem Dreyeck ABG sind die drey Winkel

$x + y + z = 2R$ (§. 117.). Nun ist $x = y$ (§. 112.), und, wegen Deckung der Dreyecke ABG und BCG (§. 141.), auch $y = u$ (§. 110.); folglich $u + y + z = x + y + z$; also der Centriwinkel (z oder AGB) und Polygonwinkel ($y + u$ oder ABC) $= 2R$.

§. 145. Aufgaben.

Zeichnung 45. 46.

1.) Den Centriwinkel zu finden.

Auflösung. Man dividire 360° durch die Anzahl der Seiten des Polygons.

Denn alle Centriwinkel eines Vielecks sind zusammen $= 4R$, weil aus ihrer gemeinschaftlichen Spitze G sich ein Kreis beschreiben läßt, in welchem 360 d. i. 4 mahl 90 Gradwinkel liegen (§. 92. Zusatz 2.). Nun entstehen aber gerade so viel Centriwinkel, als ein Polygon Seiten hat; z. B. in einem Sechseck 6, folglich ist darin jeder $= 360 : 6 = 60°$.

2.) Den Polygonwinkel zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst den Centriwinkel, und ziehe diesen von 180° ab; der Rest gibt den gesuchten Polygonwinkel.

Denn: zieht man z von 180°, als der Summe aller Winkel im Dreyeck (§. 117.) ab: so bleiben $x + y$ übrig. Es ist aber $u = y$ (§. 144.); folglich $u + y = x + y$.

Zusatz. Auch findet man den Polygonwinkel, wenn man die Zahl von zwey Mahl so viel rechten Winkeln, als das Polygon Seiten hat, um 4 vermindert, und den Rest durch die Zahl der Seiten dividirt.

Denn: zieht man z. B. aus dem Punct C (Zeichn. 46.) gerade Linien nach allen Winkeln, so entstehen dadurch so viel Dreyecke, als das Polygon Seiten hat. In jedem Dreyeck betragen aber alle Winkel 2R (§. 117.); folglich alle Winkel im Polygon (und überhaupt in jeder geradlinigen regulären oder irregulären Figur) doppelt so viel rechte, als dasselbe Seiten hat. Die Summe aller Winkel eines Fünfecks z. B. wäre sonach = 10R. Allein, weil die Winkel um den Punct C, die zusammen = 4R sind (§. 92. Zusatz 2.), nicht mit zu den Winkeln des Vieleckes gehören: so muß man diese 4R abziehen. Für das Fünfeck blieben also 6R übrig; diese durch 5, als der Anzahl der Seiten, dividirt, gibt 1 1/5R, d. i. 90 + 18 = 108°.

§. 146. Tafel der Centriwinkel und Polygonwinkel.

Die Centriwinkel und Polygonwinkel lassen sich also für jedes gegebene reguläre Vieleck auf die so eben gezeigte Weise im voraus berechnen. Man kann sich daher eine Tafel wie folgende machen:

Polygon.	Centriwinkel.	Polygonwinkel.
Fünfeck.	72°	108°
Sechseck.	60	120
Siebeneck.	51 3/7	128 4/7
Achteck.	45	135
Neuneck.	40	140
Zehneck.	36	144

Eilfeck.	32 8/11	147 3/11
Zwölfeck.	30	150

u. s. w.

§. 147. Aufgabe 1.

Zeichnung 25. 45. 46. 49.

Ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Dieß kann auf mehr als Eine Art geschehen, je nach der Seitenzahl des verlangten Polygons.

1.) Durch eine geometrische Construction.

Das Fünfeck z. B., das Sechseck, Achteck u. s. w. lassen sich folgendermaßen geometrisch verzeichnen:

a) Das Fünfeck. Zeichn. 46.

Auf den Durchmesser AB setze man aus dem Centrum C den Halbmesser CE senkrecht, halbire CB in D, und ziehe DE. Hierauf fasse man DE zwischen den Zirkel, beschreibe den Bogen EF, und ziehe FE. Diese Linie gibt die Seite des Fünfecks *).

b) Das Sechseck. Zeichn. 45.

Bey diesem hat man bloß den Radius 6 Mahl im Kreise herumzutragen, wovon der Grund folgender ist:

Der Centriwinkel (z) des Sechsecks ist 60°, der Polygonwinkel 120°. Demnach ist der halbe Polygonwinkel dem Centriwinkel gleich. Nun sind x und y jeder ein halber Polygonwinkel; folglich jeder = z, also alle drey

*) Der Beweis läßt sich hier nicht geben.

Winkel in dem △ AGB gleich. Mithin ist das △ AGB gleichseitig (§. 118. 3.), und die Seite AB ebenfalls ein Halbmesser.

c) Das Achteck. Zeichn. 25.

Man halbire die Centriwinkel eines in dem gegebenen Kreise auf die (§. 137. 7.) beschriebene Art verzeichneten Quadrats, z. B. ECB durch CF, und ziehe hierauf EF, FB u. s. w., welche Seiten des verlangten Achtecks sind.

Zusatz. Durch fortgesetzte Halbirung des Centriwinkels erhält man aus der Seite des Fünfecks die des Zehnecks, Zwanzigecks u. s. w. Aus der Seite des Sechsecks die des Zwölfecks, Vierundzwanzigecks u. s. w. Aus der Seite des Achtecks die des Sechszehnecks, Zweyunddreyßigecks u. s. w.

2.) Durch Ansetzung des Zentriwinkels.

Man ziehe (Zeichn. 49.) aus einem beliebigen Punct der Peripherie einen Halbmesser AC nach dem Centrum C. An C trage man mit Hülfe des Transporteurs den erforderlichen Centriwinkel (beym Neuneck 40°), und ziehe CB. Zuletzt verbinde man A und B durch AB; diese Linie ist eine Seite des verlangten Polygons.

3.) Durch gewisse Linien im Kreise.

Endlich giebt es Linien im Kreise, die den Seiten gewisser Polygone ziemlich nahe kommen, und die man daher der Leichtigkeit wegen dafür annehmen kann. So ist z. B. wenn man in einem Sechseck (Zeichn. 47.) zwey nächste Sehnen AE und ED durch eine gerade Linie AD verbindet, die Hälfte derselben ohne beträchtlichen Fehler für

die Seite eines Siebenecks anzunehmen, das sich in dem nehmlichen Kreise beschreiben läßt, der das Sechseck umschließt.

Ganz genau findet sich die Seite für ein Zehneck, wenn man (Zeichn. 46.) den Halbmesser CI in G halbirt, GB zieht, und damit den Bogen BHA beschreibt; da dann CH des Zehnecks Seite gibt.

§. 148. Aufgabe 2.

Zeichnung 47.

Ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten um einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Man sieht leicht, daß die Seiten des zu beschriebenden Polygons Tangenten seyn müßen. Da nun die Tangente ein Perpendikel durch den Endpunct des Halbmessers ist: so ziehe man einen solchen CE, und durch dessen Endpunct E den Perpendikel GH. Hierauf setze man an C den erforderlichen Centriwinkel, dessen anderer Schenkel CD wiederum ein Halbmesser ist. Ein Perpendikel durch D giebt alsdann die zweyte Tangente, und so immer weiter, deren Schneidnngspuncte die Ecken des Polygons bestimmen.

Zusatz. Ist in den Kreis, um welchen ein Polygon beschreiben werden soll, bereits ein ähnliches von gleicher Seitenzahl verzeichnet, so braucht man nur aus seinem Mittelpunct gerade Linien nach den Ecken zu ziehen, über den Kreis hinaus zu verlängern, und mit andern, den Seiten des innern Polygons parallelen und den Kreis in Einem Punct berührenden geraden Linien zu verbinden.

§. 149. Aufgabe 3.

Zeichnung 49.

Ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten über einer gegebenen Seite zu zeichnen.

Auch dieß läßt sich wieder auf mehr als Eine Art bewerkstelligen.

1.) **Durch Ansetzung des gegebenen oder berechneten Polygonwinkels.**

Man setze eine Seite nach der andern unter dem erforderlichen Polygonwinkel an, bis die Figur geschlossen ist.

2.) **Durch Ansetzung des halben Polygonwinkels.**

Diese Methode ist der erstern vorzuziehen. Trägt man nehmlich den halben Polygonwinkel an die Endpuncte der gegebenen Seite AB, so gibt der Schneidungspunct der Schenkel des daraus entstehenden gleichschenkeligen Dreyecks ABC, das Centrum eines Kreises, in welchem nun die gegebene Seite AB herumgetragen werden kann.

§. 150. Aufgabe 4.

Zeichnung 45.

Um ein gegebenes Polygon einen Kreis zu beschreiben.

Man halbire zwey Polygonwinkel FAB und ABC vermittelst AG und BG, deren Schneidungspunct G das Centrum des zu beschreibenden Kreises gibt.

§. 151. Aufgabe 5.

Zeichnung 47.

In ein gegebenes Polygon einen Kreis zu beschreiben.

Man halbire wiederum zwey Polygonwinkel IGH und GHK vermittelst GC und HC. Aus deren Schneidungspunct C fälle man auf GH den Perpendikel CE, welcher der Halbmesser des aus C zu beschreibenden Kreises ist.

X.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 152. Aehnliche Figuren.

Zwey oder mehrere geradlinige Figuren sind einander ähnlich, wenn alle Winkel der einen allen Winkeln der andern nach der Ordnung gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, proportionirt sind, d. h. gleiche Verhältnisse haben.

Zusatz. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist (∽). Am besten thut man, zwey ähnliche Figuren mit denselben großen und kleinen Buchstaben zu bezeichnen, so daß ähnliche Seiten einerley Buchstaben bekommen, wie im folgenden Beyspiel zu sehen.

§. 153. Aehnliche Dreyecke.

Zeichnung 34.

Die beyden Dreyecke ABC und abc sind einander ähnlich ($\triangle abc \backsim \triangle ABC$); denn es ist $\angle t = r$, $\angle u = s$, $\angle y = x$; ferner $ab = 1/2\ AB$, $ac = 1/2\ AC$, und $bc = 1/2\ BC$.

Zusatz. Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke sind ungefähr die nähmlichen wie die von der Deckung (§. 111. u. ff.) Dreyecke sind einander ähnlich, wenn entweder:

1.) Ein Winkel des einen Dreyecks einem Winkel des andern gleich ist, und die zwey Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, proportionirt sind. Oder:

2.) Wenn zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern gleich sind. Oder:

3.) Wenn die drey Seiten beyder Dreyecke nach der Ordnung proportionirt sind (d. h. wenn die gleichliegenden Seiten gleiche Verhältnisse haben).

Anmerk. Wie ein einem andern ähnliches Dreyeck zu verzeichnen sey, sieht man hieraus und aus §. 116. leicht von selbst.

§. 154. Aehnliche Vierecke.

Zeichnung 36.

Um ein rechtwinkeliges Parallelogramm einem andern ähnlich zu machen, müssen die Verhältnisse zweyer Seiten: und bey einem schiefwinkeligen auch noch ein Winkel gegeben seyn.

Bey einem Trapezium, das zwey rechte Winkel hat, wie z. B. ACDG, müssen die Verhältnisse zweyer Seiten AC und CD, nebst dem Winkel CAG; bey einem ganz schiefwinkeligen BFEG aber, die Verhältnisse von 3 Seiten BF, BG und FE, und 2 Winkel GBF und BFE gegeben seyn.

Anmerk. Die Verzeichnung erhellet aus §. 137.

§. 155. Aehnliche Vielecke.

Zeichnung 52.

Aehnliche irreguläre Vielecke zu verzeichnen, müssen alle Seiten nach ihrem Verhältniß, weniger 2, und alle Winkel weniger 1 gegeben seyn. Setzt man dann die abgemessenen Seiten unter den gegebenen Winkeln nach der bestimmten Ordnung zusammen: so geben sich die beyden fehlenden Seiten, nebst dem fehlenden Winkel von selbst.

§. 156. Absolut ähnliche Figuren.

Unter absolut ähnlichen Figuren verstehen wir solche: die einander ohne alle weitere Bedingung ähnlich sind.

Absolut ähnlich sind unter den geradlinigen Figuren sämtliche reguläre von einer und derselben Art. Also 1.) Alle und jede gleichseitige Dreyecke; 2.) alle und jede Quadrate; 3.) alle und jede Polygone von gleicher Anzahl Seiten. Unter den krummlinigen sind es alle und jede Kreise.

Bayerische Staatsbibliothek München

XI.

Von der Gleichheit des Flächenraums.

§. 157. Gleichheit der Figuren.

Figuren sind einander gleich, wenn ihre Flächenräume gleich groß sind.

Anmerk. Ganz unähnliche und verschiedenartige Figuren können gleichwohl einerley Flächenraum haben, welches einzusehen vornehmlich nachstehender Satz zu beweisen ist, aus welchem sehr wichtige Folgerungen fließen.

§. 158. Lehrsatz.

Zeichnung 36.

Parallelogramme zwischen einerley Parallelen (d. i. von gleicher Höhe) und auf gleichen Grundlinien, sind einander gleich. Also ABEF ist an Flächenraum gleich ABCD.

Denn: da AC = BD, AE = BF, und DE = DE, oder sich selbst gleich ist: so ist das △ CAE = △ DBF (§. 115.). Von diesen beyden einander gleichen Dreyecken denke man sich das, beyden gemeinschaftliche, △ DGE weg: so muß nach Grundſ. 6. §. 53. das Trapezium BGEF (welches von dem △ DBF übrig bleibt) so groß seyn, als das Trapezium ACDG (welches von dem △ CAE übrig bleibt.). Denkt man sich nun zu dem

Trapezium BGEF das △ ABG hinzu: so erhält man das Parallelogramm ABEF; und denkt man sich dasselbe △ ABG zu dem Trapezium ACDG (welches nach Obigem = BGEF ist) hinzu: so erhält man das Parallelogramm ABCD; und also müssen nach Grunds. 5. §. 53. die beyden Parallelogramme ABEF und ABCD einander gleich seyn.

§. 159. Folgerungen in Hinsicht auf Parallelogramme.

Zeichnung 37. 40. 48. 51.

1.) Zu jedem schiefwinkeligen Parallelogramm kann ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

2.) Quadrate sind Oblongen, Rauten sind Rhomboiden gleich (und umgekehrt), wenn sie doppelte Grundlinie und halbe Höhe, oder doppelte Höhe und halbe Grundlinie haben. Z. B. in Zeichn. 51. ist Bnrm = Bpoq, aber auch = Btsz. In Zeichn. 48. ist EFBG = GCID.

3.) Ueberhaupt sind Parallelogramme gleich, wenn das Verhältniß ihrer Grundlinien dem umgekehrten Verhältniß ihrer Höhen gleich ist, d. h. wenn die Höhe des einen Parallelogramms so viel Mahl kleiner ist als die Höhe des andern, um so viel Mahl die Grundlinie des ersten größer ist als die Grundlinie des andern — und umgekehrt. Z. B. ABHF (Zeichn. 37.) ist = DBCE. Denn HB verhält sich zu CB wie 1 zu 2; hingegen AB zu DB wie 2 zu 1. Oder: ADCE ist = ABIK, weil sich AD zu AB wie 1 zu 2, dagegen aber ED zu GD wie 2 zu 1 verhält.

Zusatz. Ein Parallelogramm, welches mit einem andern gleiche Höhe, aber eine Grundlinie hat, welche die Hälfte, oder das Drittel, Viertel u. s. w. der Grundlinie des andern ist — und umgekehrt: ist selbst die Hälfte, oder das Drittel, Viertel u. s. w. dieses andere Parallelogramms. Wenn z. B. in Zeichn. 37. DB = 1/2 AB ist, so ist DBHG = 1/2 ABHF. Oder: ist HB = 1/2 CB, so ist BHGD = 1/2 BCED. U. s. w.

Demnach verhalten sich Parallelogramme von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien; und Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 160. Folgerungen in Hinsicht auf Dreyecke.

Zeichnung 36. 37. 44.

1.) Alle Dreyecke von gleichen Höhen und auf gleichen Grundlinien sind einander gleich; denn sie können als die Hälften von Parallelogrammen betrachtet werden, die durch Diagonalen getheilt worden sind (§. 135.). Es ist also z. B. ABF = ABC, oder (Zeichn. 37.) ABE = BAC.

2.) Der Satz Nro. 3. §. 159. (so wie der Zusatz) gilt mithin auch von Dreyecken. ABH (Zeichn. 37.) ist = DBC, oder ECD, oder CAH u. s. w. So wie auch DBO = BCO ist; ein Beyspiel, aus welchem zugleich erhellet, daß, indem ein Parallelogramm durch 2 Diagonalen in 4 Dreyecke, wovon die gegen über liegenden sich de-

ecken, getheilt wird, diese Dreyecke sämmtlich an Flächenraum gleich sind.

3.) Zwey Dreyecke von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Dreyeck von eben der Höhe gleich, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Grundlinien jener beyden zusammen genommen. Also BDE + ABC (Zeichn. 44.) = ADC.

Zusatz. Daß dieß eben so für 3, 4 und mehrere Dreyecke gilt, ist von selbst klar.

§. 161. Folgerungen in Hinsicht auf Gleichheit von Parallelogrammen und Dreyecken.

Zeichnung 37.

1.) Parallelogramme und Dreyecke sind einander gleich, entweder: wenn ihre Höhen gleich sind, und die Grundlinie des Parallelogramms halb so groß ist, als die des Dreyecks; oder: wenn ihre Grundlinien gleich sind, und des Parallelogramms Höhe halb so groß als die des Dreyecks ist. So ist DBCE = ABE, und ABC = ABHF.

2.) Demnach kann auch zu jedem Dreyeck ein Rechteck angenommen werden, das ihm gleich ist.

§. 162. Folgerung in Hinsicht auf Trapezien.

Da ein jedes Trapezium durch eine Diagonale in zwey Dreyecke getheilt werden kann: so können auch (nach §. 161.) zu jedem Trapezium zwey Rechtecke angenommen werden, deren Summe demselben gleich ist.

§. 163. Folgerungen in Hinsicht auf reguläre Vielecke oder Polygone.

Zeichnung 45.

1.) Ein Polygon ist einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie dem Perimeter des Polygons, und dessen Höhe dem Perpendikel GH gleich ist, welcher aus des Polygons Mittelpunct auf eine seiner Seiten gefällt wird.

Denn ein Polygon besteht aus so vielen Dreyecken von einerley Höhe, als es Seiten hat (§. 141.); mithin gilt von ihm der Satz §. 160. 3.) Zusatz.

2.) Demnach, und zufolge §. 161. kann auch zu jedem Polygon ein Rechteck angenommen werden, welches ihm an Flächenraum gleich ist.

§. 164. Folgerung in Hinsicht auf irreguläre Vielecke.

Zeichnung 52.

Da ein jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreyecke getheilt werden kann: so können auch nach §. 161. zu einem irregulären Vieleck eben so viele Rechtecke, als Dreyecke da sind, angenommen werden, deren Summe dem Vieleck gleich ist.

§. 165. Folgerungen in Hinsicht auf Kreise.

Je mehr Seiten ein Polygon hat, desto näher kommt natürlich sein Perimeter dem Umfang des Kreises, welcher

um dasselbe beschrieben werden kann; desto weniger ist ferner die Höhe der Dreyecke im Polygon von des Kreises Halbmesser unterschieden; und desto näher kommt endlich der Flächenraum des Polygons dem des Kreises. Z. B. ein Zehentausendeck in einem Kreise, noch mehr aber ein Millioneneck sind von dem Kreise selbst, die Höhe ihrer Dreyecke von dem Halbmesser, und ihr Umfang von dem des Kreises ohne Vergleichung weniger unterschieden, als ein Zeheneck in demselben Kreise. Hieraus wird verständlich, warum in der Geometrie ein Kreis als ein Polygon von unendlich vielen, d. h. von einer solchen Anzahl Seiten, die größer ist, als jede Zahl, die sich angeben läßt, angesehen wird. Daraus folgt dann:

Daß der Kreis einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfang, und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Anmerk. Die Kreislinie läßt sich aber nicht geometrisch genau rectificiren, d. h. in eine gerade Linie verwandeln; daher auch der Kreis nicht geometrisch genau in ein ihm gleiches Dreyeck, und somit in ein Parallelogramm verwandelt werden kann.

§. 166. Quadratur geradliniger Figuren.

Zeichnung 41.

Daß zu allen geradlinigen Figuren gleiche Rechtecke angenommen werden können, haben wir im Vorhergehenden gesehen. Aber es läßt sich auch wieder ein jedes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Flächenraum folgendermaßen verwandeln:

Man setze des Rechtecks Grundlinie GB und seine Höhe BK in Eine gerade Linie GC zusammen; beschreibe aus deren Mitte I einen Halbkreis, und errichte nun aus B, als dem Unterschiedspuncte zwischen der Höhe und Grundlinie, den Perpendikel BD, welcher eine Seite des verlangten Quadrates ist *).

Zusatz. BD heißt die mittlere Proportional-(Verhältniß-) Linie zwischen GB und BC, d. i. GB verhält sich zu BD, wie BD zu BC. Und BD[q] heißt das Quadrat der mittlern Proportionallinie.

Anmerk. Da der Kreis sich nicht geometrisch genau rectificiren läßt (§. 165.), so läßt er sich auch nicht quadriren; und die so berüchtigte Quadratur des Zirkels gehört daher in's Reich der Träume.

§. 167. Aufgaben.

Zeichnung 48.

1.) Ein Parallelogramm (EFBG) in ein anderes ihm gleiches (GCID) zu verwandeln, wovon eine Seite (GC) gegeben ist. Zeichn. 48.

Man verlängere EF bis H = BC; ziehe von H durch G eine gerade Linie HGA, und verlängere EB bis A. Alsdann ziehe man AD || BC, ferner HCD, und verlängere zuletzt FG nach I. Die Grundlinie von GCID ist nun gerade um so viel Mahl größer als die von EFBG,

---

*) Der Beweis läßt sich hier nicht geben.

als die Höhe kleiner ist; folglich sind beyde Parallelogramme gleich (§. 159.). *)

2.) Ein jedes schiefwinkelige Parallelogramm in ein Rechteck; — ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreyeck; — ein Dreyeck in ein ihm gleiches Parallelogramm und Rechteck; — ein Polygon von einer beliebigen Anzahl Seiten in ein ihm gleiches Dreyeck und Rechteck; — und ein Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln — diese Aufgaben lassen sich nach den §§. 159. 160. 161. 166. und den §§. 116. 137. leicht ohne weitere Anweisung auflösen.

XII.

Vom Quadrat- oder Flächenmaße, und von der Ausrechnung geradliniger Figuren.

§. 168. Quadratruthe, Quadratmeile u. s. w.

Eine Meile in's Gevierte, d. i. eine Fläche, die aus 4 gleichen rechtwinkeligen Seiten besteht (oder bestehend gedacht wird), deren jede 1 Meile lang ist, heißt eine Quadratmeile. Und so sind Quadratruthen, Quadrat-

*) Bleibt der Kürze wegen unbewiesen.

schuhe, Quadratzolle, Quadratlinien — solche Quadrate, wovon jede Seite 1 Ruthe, 1 Schuh, 1 Zoll, 1 Linie mißt.

Die Zeichen dafür sind: □°, □′, □″, □‴.

§. 169. Gebrauch der Quadratfläche zum Maß aller andern Flächen.

So wie Linien durch Linien, so müssen Flächen durch Flächen gemessen werden, weil eine Größe, welche das Maß einer andern abgeben soll, mit dieser von Einer Art seyn, und einen Theil derselben vorstellen muß, von welchem man wissen will, wie oft er in dieser Größe enthalten sey. Zum Maße der Flächen hat man das Quadrat gewählt, weil dieß die einfachste unter allen Flächen ist (indem es durch eine einzige Seite bestimmt wird), und folglich die deutlichste Vorstellung gewährt.

§. 170. Eintheilung einer Quadratfläche.

Zeichnung 51.

Die Eintheilung der größern Maße in kleinere ist bey den Flächen nothwendig eine ganz andere als bey den Linien. Stellt AB eine Ruthe vor, so wäre jeder der 10 Theile 1 Fuß Dec. M., Abcd also ein Quadratfuß, und zwischen AB und de eine Reihe von 10 Quadratfußen. An BD kann aber diese Reihe 10 Mahl wiederholt werden; folglich haben über AB 10 solcher Streifen von 10 Quadratfußen wie Abde Platz. Demnach hält die Quadratfläche ABCD, deren jede Seite = 1° oder 10′ angenommen worden, 10 Mahl 10, d. i. 100 □′.

§. 171. Ausrechnung eines Quadrates.

Aus Obigem ersieht man, daß man von einem Quadrat nur Eine Seite zu messen, und die Zahl ihres Maßes mit sich selbst zu multipliciren braucht, um den ganzen Flächeninhalt zu erfahren. Daher heißt auch das Product, welches herauskommt, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, die Quadratzahl, oder auch bloß das Quadrat jener Zahl, und die Zahl selbst die Quadratwurzel. So sind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 die Wurzeln.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 die Quadrate.

§. 172. Decimal- und Duodecimal-Eintheilung des Quadratmaßes.

Zeichnung 51.

Wäre AB ein Fuß, so wären begreiflicher Weise (nach §. 170.) die 100 kleinen Quadrate in ABCD Quadratzolle; und Quadratlinien, wenn AB ein Zoll wäre. Eine Quadratruthe Decim. M. enthält also auch 100 Mahl mehr Quadratzolle als Quadratfuße, d. i. 100 Mahl 100 oder 10,000 □″; und wiederum 100 Mahl mehr Quadratlinien, d. i. 100 Mahl 10,000 oder 1,000,000 □‴.

Wäre AB in 12 gleiche Theile getheilt, so hätte BD natürlich deren eben so viel; mithin hätten über AB 12 Streifen von 12 solchen kleinen Quadraten, folglich in der ganzen Fläche ABCD 12 Mahl 12, d. i. 144 Platz. Also ist 1 □° Duodec. M. = 144 □′; 1 □′ = 144 □″, u. s. w. Folglich enthält eine solche Quadratruthe 144 Mahl

144 oder 20,736 □″, und wieder 144 Mahl mehr, d. i. 144 Mahl 20,736 oder 2,985,984 □‴.

§. 173. Fortsetzung.

Wenn man die Anzahl von 4573192‴ Decimal-Längenmaß in Ruthen, Fußen und Zollen angeben sollte: so brauchte man bloß (nach §. 41.) von der Rechten nach der Linken allemahl Eine Ziffer bis zum Tausender abzuschneiden, wodurch man 4573° 1′ 9″ 2‴ erhielte. Beym Decimal-Quadratmaße hingegen muß man also schliessen: weil 100 □‴ = 1 □″ sind, so sind 192 □‴ = 1 □″ 92 □‴; daher sind zuerst die 92 abzuschneiden. Ferner: da 100 □″ = 1 □′ sind, so sind 731 □″ = 7 □′ 31 □″; folglich müssen jezt die 31 abgeschnitten werden. Und endlich, weil 100 □′ = 1 □° sind, so sind die noch übrigen 457 □′ = 4 □° 57 □′. Demnach hat man zulezt noch die 57 abzuschneiden, da denn die 4 für die Ruthen übrig bleibt; und es sind also 4,57,31,92 □‴ = 4 □° 57 □′ 31 □″ 92 □‴.

Aus diesem Beyspiel erhellet: daß und warum man beym Decimal-Quadratmaße jederzeit zwey Ziffern von der Rechten nach der Linken abzuschneiden hat.

§. 174. Fortsetzung.

Frage: Wie viel sind 3068204 □‴ in Decimal- und Duodecimal-Quadratmaß?

Antwort: Dem Obigen zufolge schneide man nach der Decimal-Eintheilung je 2 und 2 Ziffern ab, so erhält man 3 □° 6 □′ 82 □″ 4 □‴. Nach der Duodecimal-Ein-

theilung aber würde man erst diese Anzahl von Quadratlinien durch die Division mit 144 in Quadratzolle, diese durch den gleichen Divisor in Quadratschuhe, und diese abermahls durch den gleichen Divisor in Quadratruthen zu verwandeln haben. Das Facit wäre: 1 □° 3 □′ 138 □″ 140 □‴ Duodec. M.

Dieß Beyspiel mag hinreichend seyn, um zu zeigen: daß auch bey dem Quadrat, wie bey dem Längenmaße die Decimal-Eintheilung ungleich bequemer ist.

§. 175. Ausrechnung der Parallelogramme.

Zeichnung 51.

Beym Ausmessen einer jeden Fläche verlangt man zu wissen: wie oft eine Quadratruthe, ein Quadratschuh u. s. w. in derselben enthalten sey. Aus den §§. 170. 171. ist bereits bekannt, daß und warum die Zahl des Maßes einer Seite der Quadratfläche mit sich selbst multiplicirt, deren Inhalt angibt. Theilt man die Seiten nB und BD des Rechtecks nBDf in lauter gleiche Theile: so sieht man bald, daß über nB so viele Streifen kleiner Quadrate Platz haben, als BD Theile hat; und daß folglich die Anzahl dieser Quadrate weit bequemer gefunden wird, wenn man ebenfalls bloß die Zahlen des Maßes der Seiten nB und BD mit einander multiplicirt. Und weil in einem Rechteck je zwey Seiten die Grundlinie und Höhe desselben sind, so wird diese Regel kürzer und allgemein so ausgedrückt: um den Flächeninhalt zu erfahren, multiplicire man die

Grundlinie mit der Höhe; — ein Satz, der dann ferner nach §. 158. und 159. für alle und jede Parallelogramme gilt.

§. 176. Ausrechnung der Dreyecke.

Da nach §. 135. die Diagonale ein Parallelegramm halbirt: so findet man den Flächeninhalt eines Dreyecks, als der Hälfte eines Parallelogramms, entweder: indem man seine Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und das Product mit 2 dividirt; oder: wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multiplicirt; — ein Verfahren, dessen Richtigkeit von elbst einleuchtet.

§. 177. Ausrechnung eines Vielecks.

Weil ein jedes, reguläres und irreguläres, Vieleck durch Diagonale in Dreyecke zerfällt werden kann: so hat man erst jedes Dreyeck nach dem vorigen §. zu berechnen, und alsdann die Summen aller zu addiren, wodurch man den Flächeninhalt der ganzen Figur erfährt.

Anmerk. Die Berechnung des Flächeninhalts kommt noch außer dem Feldmessen im gemeinen Leben sehr häufig vor. Um z. B. die Anzahl der Ziegel, die zur Deckung eines Daches; oder der Fliesen, die zur Belegung einer Hausflur; oder die Menge von Ellen Tapeten, die zur Tapezirung eines Zimmers erforderlich sind, zu finden: ist es vor allem nöthig, den Flächeninhalt dieser Gegenstände zu berechnen. Will man einen Garten, einen Hof, einen Tisch

u. s. w. noch einmahl so groß haben: so sieht man bald, daß man gewaltig fehlen würde, wenn man jede der Seiten noch einmahl so groß machte; sondern daß man den Flächenraum suchen und diesen verdoppeln muß, u. dgl. m.

XIII.

Von der Kreisrechnung.

---

§. 178. Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser.

Es ist bereits in §. 160. bemerkt worden, daß der Kreis sich nicht geometrisch rectificiren lasse; arithmetisch aber kann dieß so genau geschehen, als man es nur immer verlangen mag. Der berühmte Mathematiker des Alterthums, Archimedes, berechnete zuerst aus einem Sechs- und neunzigeck, daß der Umfang eines Kreises etwas mehr als 3 1/7 Mahl so groß sey, als sein Durchmesser, oder sich zu demselben ungefähr wie 22 zu 7 verhalte. Dieses Verhältniß wird von manchem Handwerker angewendet. Wenn z. B. ein Küfer einen Reif um ein Faß legen, oder ein Schmid ein Rad mit Eisen beschlagen will, so mißt er den Durchmesser desselben 3 Mahl über, und gibt etwas zu.

In gemeinen Rechnungen gebraucht man außer diesem

auch noch das Verhältniß von 314 zu 100. Genauer als beyde ist das von 355 zu 113; wobey der Fehler nur sehr unbedeutend, indem, wenn z. B. der Durchmesser = 113′, der Umkreis = 355 1/1000′ ist. Man hat jedoch die Genauigkeit dieser Berechnung noch unendlich weiter getrieben; allein für Fälle des bürgerlichen Lebens sind die angeführten hinreichend.

§. 179. Berechnung des Durchmessers aus einem gegebenen Umkreise, oder des Umkreises aus einem gegebenen Durchmesser.

Man bemerkt leicht, daß hierbey bloß ein Ansatz nach der Regel de Tri zu machen ist. Z. B.

22 : 7 = Umkreis : (Durchmesser)

Oder:

100 : 314 = Durchmesser : (Umkreis).

Anmerk. Um z. B. die Dicke der Welle eines Wasserrades, deren Umfang gegeben ist; oder den erforderlichen Umfang eines Baumes, aus welchem Dielen von bestimmter Breite geschnitten werden sollen, berechnen zu können, muß man mit dem erwähnten Verhältniß bekannt seyn. Mühlenbaumeister, Uhrenmacher u. s. w. können diese Kenntniß gar nicht entbehren, wenn sie wissen wollen, wie viel Stäbe in ein Getriebe, wie viel Schaufeln oder Schöpfkasten in ein Wasserrad, wie viel Zähne an ein Stirn- oder Kammrad, wie viel Leisten in ein Tretrad u. dgl. m. kommen können; falls nähmlich die Stärke, oder Größe und

Breite der Stäbe, Schaufeln, Leisten u. s. w. nebst ihrer Entfernung von einander, so wie die Durchmesser der Räder gegeben sind. Alsdann sucht man den Umkreis, addirt z. B. die Stärke eines Zahnes und seine Entfernung vom nächsten zusammen, und dividirt mit dem Product in den Umkreis: so bekommt man die Anzahl der Zähne heraus.

§. 180. Berechnung der Länge eines Kreisbogens.

Zeichnung 4.

Ist aus dem gegebenen Durchmesser der Umkreis berechnet, und die Anzahl der Grade des Bogens AIF bekannt: so ergibt sich, wie leicht einzusehen, nachstehender Regel de Tri-Satz:

360°: Grade des Bogens = Umkreis: (Bogen.)

Oder: ist z. B. der Bogen 50°, so ist er 50/360 oder 5/36 des Umkreises. U. s. w.

Zusatz. Die Rechnung abzukürzen, kann man auch ansetzen:

180° : Grade des Bogens = Halber Umkreis: (Bogen.)

§. 181. Ausrechnung der Kreisfläche.

Da nach §. 165. der Kreis einem Dreyeck gleich ist, das den Umfang des Kreises zur Grundlinie, und seinen Halbmesser zur Höhe hat: so ist klar, daß der Inhalt eines Kreises gefunden wird, wenn man seine Peripherie mit dem halben Radius multiplicirt.

Zusatz. Man hat ferner berechnet, daß die Kreisfläche

sich zu dem Quadrat des Durchmessers ungefähr wie 11 zu 14 verhält. Der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser gegeben ist, läßt sich also auch, und zwar ziemlich genau, nach folgendem Regel de Tri-Satz finden:

14 : 11 = Quadrat des Durchmessers : (Kreisfläche.)

§. 182. Ausrechnung eines Kreisausschnittes.

Zeichnung 4.

Zuerst muß der Inhalt des ganzen Kreises gesucht, und die Grade des Bogens FB gemessen werden; so erhält man den Inhalt des Ausschnittes FCB durch den Ansatz:

360° : Grade von FB = Kreisfläche : (Ausschnitt FCB.)

Zusatz. Auch kann, nachdem der Bogen (s. §. 180.) des Ausschnittes berechnet worden, derselbe mit dem halben Radius multiplicirt werden.

§. 183. Ausrechnung eines Kreisabschnittes.

Zeichnung 4.

Zuvor ist der ganze Ausschnitt ACFI, und dann das Dreyeck ACF auszurechnen. Letzteres abgezogen, bleibt der Inhalt des Abschnittes AFI.

Zusatz. Man kann auch die Sehne des Abschnitts mit 2/3 seiner Höhe multipliciren. Das Product gibt den Inhalt des Abschnitts mit einem desto geringern Fehler, je kleiner Sehne und Höhe desselben sind.

§. 184. Ausrechnung eines Rings.

Zeichnung 27.

Die 3 Kreise in der Zeichnung bilden 2 Ringe. Um den Inhalt, z. B. des innern zu finden, hat man zuvor die beyden innern Kreise auszurechnen, und den Inhalt des kleinsten von dem des größern abzuziehen. Der Rest gibt den Inhalt des Rings.

Zusatz. Wollte man bloß einen Theil b des Ringes wissen, so hätte man noch überdieß die Grade des Bogens ebf zu messen, und alsdann anzusetzen:

360°: Grade von ebf = Ganzer Ring: (Stück b.)

Anmerk. Wer mit Decimal-Brüchen umzugehen weiß, kann sich Rechnungen der Art nicht nur sehr erleichtern, sondern auch nach weit schärfern Verhältnissen rechnen. Allein nur sehr wenige von denen, für die diese Elementargeometrie bestimmt ist, dürften damit bekannt seyn; und eine Anleitung dazu, wie sie der Anfänger bedarf, wäre zu weitläufig geworden.

XIV.
Von der Vergleichung und Veränderung der Flächen ähnlicher Figuren.

§. 185. Verhältniß ähnlicher Figuren.

Aus der Eintheilung des Quadrates (§. 170. 171.) ergibt sich: daß, wenn die Seiten einer geradlinigen Figur 2, 3, 4 Mahl größer oder kleiner genommen werden, man eine 4, 9, 16 Mahl größere oder kleinere Figur erhält. Ferner lassen sich daraus folgende Sätze erweisen:

1.) Aehnliche geradlinige irreguläre Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten (d. i. die den gleichen Winkeln gegen über liegen).

2.) Aehnliche reguläre wie die Quadrate einer ihrer Seiten.

3.) Polygone zugleich auch wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der Kreise, in welchen sie beschrieben sind.

4.) Kreise wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Will man also die Flächen ähnlicher Figuren vergleichen: so hat man ihre gleichnahmigen Seiten zu messen, und dieses Maß mit sich selbst zu multipliciren; da dann diese Quadratzahlen angeben, wie viel größer oder kleiner die eine Figur sey als die andere.

§. 186. Vergrößerung oder Verkleinerung einer Figur nach gewissen Verhältnissen.

Die erste Regel hierbey ist: man muß das Maß der Seiten so wählen, daß deren Quadratzahlen das verlangte Verhältniß haben. Ein Quadrat z. B. von 16 □′ hat zur Seite 4′. Will man ein 4 Mahl kleineres = 4 □′ haben, so darf man nur die Hälfte der Seite von jenem nehmen; denn 2 . 2 sind = 4. Mit den Kreisen hat es dieselbe Bewandniß; der halbe Durchmesser, oder der halbe Halbmesser gibt einen vier Mahl kleinern Kreis.

Dergleichen Verhältnisse ähnlicher Figuren lassen sich daher durch Rechnung, und mit Hülfe der Ausziehung der Quadratwurzel *) finden und verändern. Die Geometrie lehrt aber auch noch die Flächen durch bloße Zeichnung in allerley Verhältnissen zu vermindern oder zu vermehren.

§. 187. Gebrauch der mittlern Proportionallinie zur Veränderung des Flächeninhalts.

Zeichnung 41.

Gesetzt, man wollte einen Kreis beschreiben, der um ein Drittheil, oder um drey Achtel u. s. w. kleiner wür-

---

*) Da diese die Bekanntschaft mit Decimalbrüchen voraussetzt, in der Kürze nicht wohl verständlich zu machen ist, und überhaupt mehr der Arithmetik angehört: so bleibt sie hier unerörtert.

de, als ein anderer, dessen Halbmesser = GB wäre: so nehme man eine Linie BC = 2/3, oder 5/8 GB, trage sie in gerader Richtung an GB, und suche nun nach §. 166. die mittlere Proportionallinie DB; diese gibt den Radius des verlangten Kreises. Von einer geradlinigen Figur gäbe sie die gleichnahmige Seite einer ähnlichen, die zu der ersten das gesuchte Verhältniß hat.

§. 188. Der Pythagorische Lehrsatz.

Zeichnung 43.

Dieser von seinem Erfinder, dem griechischen Philosophen Pythagoras, also genannte Lehrsatz behauptet: daß in einem rechtwinkeligen Dreyeck (ABC) das Quadrat der Hypotenuse (BC) so groß als die Quadrate der beyden Katheten (AB und AC) zusammen genommen sey.

Die Zeichnung gibt davon einen augenscheinlichen Beweis. Jede der 3 Seiten des Dreyecks ABC ist in gleich große Theile, AB in 3, AC in 4 getheilt, und auf BC kommen deren 5. Mithin hält AB q 9, AC q 16, und BC q 25, d. i. 9 + 16 kleine gleiche Quadrate. Also ist BC q = AB q + AC q

Zusatz. 1. Das Nähmliche gilt auch von ähnlichen Vielecken, sowohl regulären als irregulären, zu deren gleichnahmigen Seiten man Eine von einem rechtwinkeligen Dreyeck nimmt. Die größte Figur ist den beyden andern zusammen gleich.

Zusatz 2. Drey gerade Linie, welche sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten, bilden demnach in ihrer Zusammensetzung ein rechtwinkeliges Dreyeck; woraus unter andern erhellet, wie auf dem Felde ein rechter Winkel bloß mit Stäben und der Meßkette abgesteckt werden kann.

§. 189. Anwendung des Pythagorischen Lehrsatzes zur Auflösung der folgenden Aufgaben.

Zeichnung 25. 40. 42.

1.) Ein Quadrat, oder einen Kreis zu machen, welche doppelt so groß sind als die gegebenen Zeichn. 25.

Man ziehe eine Diagonale AE. Diese ist die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreyecks DEA: folglich ein auf AE errichtetes Quadrat = 2 DEAB.

Beym Kreise setze man den Radius mit sich selbst rechtwinkelig zusammen, und ziehe die Hypotenuse, diese gibt den erforderlichen Radius.

Zusatz. Man könnte auch den Diameter nehmen. Da nun z. B. AD dem Diameter des innern Kreises gleich, und ED = AD ist: so ist der mit 1/2 AE oder CA beschriebene Kreis = 2 innern, d. i. der Kreis um das Quadrat doppelt so groß als der Kreis im Quadrat.

2.) Ein Quadrat oder einen Kreis zu machen, welche der Summe zweyer andern gleich sind.

Man setze die Seiten der gegebenen Quadrate, und die Halbmesser der Kreise rechtwinkelig zusammen, und verfahre wie oben.

3.) Ein Quadrat oder einen Kreis zu machen, welche dem Unterschiede zweyer gegebenen gleich sind. Zeichn. 40. 42. 43.

Es sollte z. B. ein Quadrat gefunden werden, das dem Unterschiede der Quadrate ABFE (Zeichn. 40.) und BECD (Zeichn. 43.) gleich wäre: so errichte man (Zeichn. 42.) auf das Ende der Seite BE des kleineren Quadrates einen Perpendikel, und schneide aus E mit einer Seite des größern, denselben in C: so ist CB die Seite des gesuchten Quadrates.

Bey Kreisen verfährt man mit den Halbmessern auf die nähmliche Art.

4.) Ein Quadrat oder einen Kreis zu machen, die drey Mahl so groß sind als die gegebenen. Zeichn. 42.

Es sey z. B. ABDC gegeben: so ziehe man zuerst die Diagonale DB, deren Quadrat = 2 ABDC ist (s. No. 1.). Hierauf setze man eine Seite dieses letztern noch ein Mahl in BF unter einem rechten Winkel an B, und ziehe DF: so ist $DF^q = DB^q + BF (= AB)^q$, d. i. 2 Mahl und 1 Mahl, oder 3 Mahl so groß als ABDC.

Bey Kreisen setze man zuvor die Halbmesser rechtwinkelig zusammen, und verfahre im übrigen auf gleiche Weise.

5.) Ein Quadrat oder einen Kreis um ein Viertheil zu vergrößern. Zeichn. 42.

Es sey AB die gegebene Seite, oder der Halbmesser, und HB = 1/2 AB: so ist $HB^q = 1/4\ AB^q$ (§. 186.); mithin gibt die Hypotenuse GA ein Quadrat, oder einen Kreis, welche = $AB^q + HB^q$, d. i. $5/4\ AB^q$ sind.

6.) Ein Quadrat oder einen Kreis um ein Viertheil zu verkleinern. Zeichn. 41.

GC sey gegeben: so trage man die Hälfte von GC aus G an den Halbkreis nach H, und ziehe HC. Nun ist $GH^q = 1/4\ GC^q$, weil $GH = 1/2\ GC$ ist (§. 186.). Ferner ist $\angle\ GHC = 1R$, als Winkel im Halbkreis (§. 120. 2.); also $GH^q + HC^q = GC^q$ (§. 188.), und $HC^q = 3/4\ GC^q$.

Anmerk. Bey einigem Nachdenken, und nachdem man das, was über die Aehnlichkeit, über das Quadratmaß, die mittlere Proportional-Linie und den Pythagorischen Lehrsatz vorgebracht worden, recht gefaßt hat — wird man nun nach den obigen Beyspielen nicht nur finden können, wie Quadrate und Kreise sich in noch andern Verhältnissen ihrer Flächen verändern lassen; sondern — in Erwägung des Satzes (§. 185. 1.): daß ähnliche geradlinige Figuren sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten verhalten — dergleichen eben so angenehme als nützliche Veränderungen auch mit andern regulären und irregulären ähnlichen Figuren vorzunehmen im Stande seyn.

XV.

Vom Feldmessen.

§. 190. Schwierigkeit dieser Kunst.

Das Feldmessen, oder die Kunst: Gärten, Felder, Waldungen und ganze Gegenden aufzunehmen, und einen Grundriß davon zu machen, erfordert ungleich mehrere Kenntnisse und Geschicklichkeiten, als viele, die mit diesem wichtigen Geschäfte sich zu befassen wagen, gar nicht ahnden. Außer einer gründlichen Kenntniß der Geometrie und Trigonometrie *), muß der Feldmesser eine genaue Bekanntschaft mit einer Menge von Instrumenten und deren Einrichtung, Geschicklichkeit im Gebrauch derselben und Fertigkeit im Zeichnen besitzen. Deßwegen kann hier von einer eigentlichen Anweisung zu dieser Kunst nicht die Rede seyn; sondern wir begnügen uns einzig, dem Anfänger die Möglichkeit der Auflösung einiger der vornehmsten Aufgaben, hauptsächlich vermittelst der Lehrsätze von der Deckung und Aehnlichkeit der Dreyecke, begreiflich zu machen; obschon die mannigfaltigen Schwierigkeiten bey der Praxis meistens ganz andere Methoden erfordern, als die im Folgenden gezeigten.

*) Die Wissenschaft: die Seiten und Winkel der Dreyecke durch Rechnung zu bestimmen.

§. 191. Aufgabe 1.

Zeichnung 53. 54. 55.

Die Weite zwischen zwey Oertern zu finden, die nicht unmittelbar gemessen werden kann.

Hierbey können 3 Fälle Statt finden:

1.) Wenn man zwar zu beyden Oertern, aber nicht in gerader Linie von dem einen zum andern kommen kann. Zeichn. 53.

Es wird ein Standpunct C angenommen, aus dem man nach A und B messen kann. Diese Längen werden in gerader Linie zurück nach E und D getragen, CE = CA, und CD = CB gemacht; wodurch dann zugleich x = y (§. 60. 91.) und △ EDC ≌ △ ABC (§. 111.), folglich DE = AB wird.

Zusatz. Auf dem Meßtische *) läßt sich, ohne Zurücktragung der gemessenen Längen, sogleich ein dem Dreyeck ABC ähnliches verzeichnen, dessen Seite ab die Weite von AB nach verjüngtem Maße darstellt.

2.) Wenn man nur zu Einem von den beyden Oertern kommen kann. Zeichn. 54.

Man verlangt z. B. die Breite eines Flusses zu wissen: so nehme man einen Standpunct C, aus welchem CD gemessen werden kann, trage diese Länge zurück nach B, und

---

*) Das einfachste Werkzeug; dessen, so wie die Einrichtung aller übrigen, man aber durch Anschauung kennen lernen muß.

mache den Winkel o = u *). Hierdurch ergibt sich die Richtung des Schenkels BE, der so weit verlängert werden muß, bis E mit C und A in gerader Linie liegt; welches man daran sieht, wenn beym Visiren die Absteckstäbe einander decken (§. 17. 3.). Dadurch wird nun auch x = y (§. 60. 91.), und △ BEC ≅ △ DAC (§. 114.), folglich BE = DA.

Zusatz. Auf dem Meßtisch kann man wiederum an Statt des deckenden Dreyecks BEC, ein dem DAC ähnliches nach dem verjüngten Maßstab zeichnen.

3.) Wenn man zu keinem von beyden Oertern kommen kann. Zeichn. 55.

Man wählt einen Standpunct C, und steckt bey E einen Stab mit CA, in D einen andern mit CB; in G einen mit B und E, und in F noch einen mit D und A in gerader Linie: so lassen sich alle Linien des Vierecks DEFG messen. Hierauf verzeichne man nach dem verjüngten Maßstab ein ähnliches; verlängere an demselben df und ec, so wie eg und dc, bis erstere sich in a, letztere in b schneiden, und ziehe ab: dieß ist die gesuchte Weite im verjüngten Maße.

§. 192. Aufgabe 2.

Zeichnung 56.

Die Höhe eines Hauses, Thurmes u. dgl. zu messen.

---

*) Zur Messung der Winkel auf dem Felde gibt es wieder verschiedene Instrumente, von denen bald das eine, bald das andere bequemer zu gebrauchen ist.

1.) Wenn man in gerader Linie bis an den Fuß desselben kommen kann.

Man nimmt einen Standpunct C, in welchen das Instrument gestellt wird, womit man den Winkel ACB mißt. Hierauf muß auch CE gemessen, und nach dem verjüngten Maße ein dem rechtwinkeligen Dreyeck CBA ähnliches verzeichnet werden, dessen Höhe ba die Höhe des Thurmes gibt, nachdem noch die verjüngte Höhe des Stativs vom Winkelmesser CC, oder sicherer BE, dazu gerechnet worden ist.

Zusatz. Auch könnte man in beliebiger Entfernung einen langen Stab FH senkrecht in die mit dem Thurm horizontale Ebene CE stecken; einen kleinern aber in CC, und zwar so: daß, wenn man von der Spitze C nach A visirt, die Spitze F die Thurmspitze A bedeckt, so daß demnach C, F und A in einer geraden Linie liegen. Alsdann würde die Höhe beyder Stäbe, ihre Entfernung CH, und die Entfernung CE gemessen, und nun geschlossen: wie beyder Stäbe Entfernung CH, zu dem Unterschied ihrer Höhe FG — so erhält sich die Entfernung des Stabes C von B, zu der Höhe des Thurmes. Denn es ist $\triangle CGF \backsim \triangle CBA$; mithin ist nur noch EB zu addiren.

2.) Wenn man nicht in gerader Linie bis an den Thurm kommen kann.

In diesem Fall muß eine Standlinie CD gewählt werden, welche auf der horizontalen Ebene mit E in gerader Linie liegt. Nachdem die Winkel bey C und D gemessen worden, verzeichnet man ein dem Dreyeck CDA ähnliches cda

nach dem verjüngten Maßstabe, und verlängert dc so weit, bis ein Perpendikel aus a die Linie in b trifft; so gibt ab + bc die gesuchte Höhe.

§. 193. Aufgabe 3.

Zeichnung 13. 57.

Zu finden, um wie viel eine abhängige Fläche von der Horizontal-Richtung abweiche.

Diese Aufgabe kommt in den Geschäften des bürgerlichen Lebens mit am häufigsten vor. Besonders ist es für den Mühlenbau sehr wichtig, das sogenannte Gefälle eines Stromes oder Baches zu kennen, d. h. zu wissen, wie viel der Abhang des Erdbodens betrage, über den das Wasser fließt; nach dem sich großen Theils die Gewalt desselben bestimmt.

Bey kleinen Weiten läßt sich dieß schon mit Hülfe einer Setzwage finden, deren Querlineal 12 bis 16 Schuh lang ist. Man schlägt nähmlich Pfähle ein, bringt die herausstehenden Erdpuncte D und E vermittelst der Setzwage in horizontale Richtung gegen einander, und mißt nun, wie viel mehr der eine Pfahl über die Erdfläche hervorrage, als der andere; der Unterschied FB giebt das gesuchte Gefälle. — Für große Entfernungen aber bedient man sich eines Fernrohres, oder einer mit Wasser nicht völlig angefüllten geraden Glasröhre; in welcher folglich eine Luftblase bleibt, die, wenn sie in der Mitte schwebt, anzeigt, daß die Röhre horizontal liege. Nach den Enden derselben wird dann von beyden Seiten visirt; und zwar werden dazu Tafeln ge-

braucht, die zur Hälfte weiß und schwarz angestrichen sind, und die so lange an den Stangen DA und EB verschoben werden, bis man den Mittelpunct derselben genau in der Mitte des Fernrohres C gewahr wird. IH und FB sind die Unterschiede der Höhe zwischen AH und AB.

§. 194. Berechnung des Inhalts irgend eines aufgenommenen Stücks der Erdfläche.

Zeichnung 52.

Wären die Gränzen des aufgenommenen Stückes immer geradlinig, so wäre der Flächeninhalt bald gefunden, indem man die Figur nur durch Diagonalen in Dreyecke zerfällte, deren Höhen suchte und nach §. 176. berechnete. Allein es kommen sehr häufig krummlinige Stücke vor. Da macht man es denn, wie in der Zeichnung zu sehen ist; zieht gerade Linien innerhalb und außerhalb der krummlinigen Figur, wobey die Gleichheit der abgeschnittenen und zugegebenen Stücke durch's Augenmaß geschätzt wird; oder berechnet Stücke wie a, b, c, d, e, f als Parallelogramme; andere, wie Af und Ba als Dreyecke, u. s. w.

B.

Stereometrie.

XVI.

Von den geometrischen Körpern überhaupt.

§. 195. Körper.

Schon die in §. 3. gegebene Erklärung deutet darauf hin: daß in der Geometrie bey den Körpern einzig die Größe des Raumes und seiner Gränzen betrachtet wird, und daß da weder von der Materie, noch dem Gewicht derselben die Rede ist.

§. 196. Eckige und runde Körper.

In Ansehung der Beschaffenheit der Oberflächen sind die Körper entweder eckig, wenn sie von lauter ebenen Flächen — oder rund, wenn sie ganz oder zum Theil von einer gekrümmten Fläche begränzt werden.

§. 197. Prisma und Pyramide.

Zeichnung 69. 70. 71. 72.

Zu den eckigen Körpern gehören:

1.) Die Prismen. Ein Prisma ist der körperliche Raum zwischen zwey ebenen Grundflächen ABC

und EFD (Zeichn. 72.), welche parallel, gleich und ähnlich sind; und zwischen so vielen Parallelogrammen zu Seitenflächen, als eine der Grundflächen Seiten hat. Nach der Anzahl dieser Seitenflächen gibt es dann drey- vier- und vielseitige Prismen.

Besonders zu merken sind:

a) Das Parallelopipedon (Zeichn. 70.), dessen Grundflächen ebenfalls Parallelogramme oder Quadrate sind. Ein solches Prisma hat 6 Seiten, 8 Ecken, 12 Kanten *).

Zusatz. Mauersteine, Quadersteine, Kisten, Zimmer u. s. w. pflegen Parallelopipeda zu seyn.

b) Der Würfel oder Cubus (Zeichn. 69.), ein Parallelopipedon, dessen Grund- und Seitenflächen lauter gleiche Quadrate sind.

2.) Die Pyramiden. Eine Pyramide ist der körperliche Raum zwischen Einer ebenen geradlinigen Grundfläche ABCD, und so vielen in einer Spitze F sich endigenden Dreyecken zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. Es gibt also ebenfalls drey- vier- und vielseitige Pyramiden, je nachdem die Grundfläche ein Drey- Vier- oder Vieleck ist.

§. 193. Cylinder, Kegel, Kugel.

Zeichnung 73. 74. 75.

Zu den runden Körpern gehören:

---

*) Scharfe Seiten.

1.) Der Cylinder (rundes Prisma). Ein Cylinder ist der körperliche Raum zwischen zwey gleichen und parallelen Kreisen zu Grundflächen, und einer krummen Seitenfläche, auf der sich von jedem beliebigen Puncte des Umfangs der einen Grundfläche bis zum Umfang der andern eine gerade Linie AB oder HG ziehen läßt, welche der Achse des Cylinders, d. i. der geraden Linie CD zwischen den Mittelpuncten beyder Grundflächen, parallel ist.

Zusatz. Die Walzen in den Drehorgeln und Spieluhren; die Wellen an Mühlrädern, die geraden Glasröhren u. dgl. m. sind Cylinder.

2.) Der Kegel oder Conus (runde Pyramide). Ein Kegel ist der körperliche Raum zwischen Einem Kreise, und einer krummen, sich in einer Spitze endigenden Seitenfläche, von deren Gipfel D bis auf einen jeden Punct des Umfangs der Grundfläche gerade Linien DI, DH, DB u. s. w. gezogen werden können.

Zusatz. Der abgekürzte Kegel ABEF ist ein solcher, von dem ein kleineres oder größeres Stück EDFG parallel mit der Grundfläche abgeschnitten ist. Eimer, Trinkgläser, Bäume, die oben und unten parallel abgesägt sind, u. a. m. sind als abgekürzte Kegel anzusehen.

3.) Die Kugel. Eine Kugel ist der körperliche Raum, der von einer einzigen krummen Fläche umschlossen ist, deren Punkte A, K, B, H, D, u. s. w. alle von einem Puncte C, dem Mittelpuncte der Kugel, gleich weit entfernt sind.

§. 199. Aehnliche Körper.

Eckige Körper sind ähnlich, wenn alle Winkel an ihnen gleich sind, und wenn sie von gleich vielen, in der Ordnung ähnlichen ebenen Figuren begränzt werden.

Runde Körper sind ähnlich, wenn ihre Achsen einerley Neigung gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser derselben haben.

§. 200. Gerade und schiefe Körper, und deren Höhe.

Zeichnung 70. 71. 73. 74.

1.) Ein Prisma ist gerade, wenn die Kanten der Seitenflächen auf den Kanten der Grundflächen rechtwinkelig stehen; im Gegentheil schief.

Die Höhe eines Prisma ist die perpendikuläre Entfernung seiner parallelen Grundflächen von einander. Bey einem geraden Prisma gibt jede Seitenkante EA die Höhe. Bey einem schiefen kann der Perpendikel auch außerhalb der einen Grundfläche gefällt werden, wie ON auf N; welcher Punct aber mit der Grundfläche in Einer geraden Ebene liegen muß.

2.) Die Höhe einer Pyramide ist der Perpendikel aus der Spitze auf die Ebene der Grundfläche. Trifft er auf den Mittelpunct *) der letztern, wie FE, so ist die

*) D. i. der Punct, in welchem sich die Diagonalen schneiden; oder das Centrum eines Kreises, der um die Ecken der Grundfläche beschrieben würde.

Pyramide gerade; fiel er außerhalb desselben, so wäre sie schief.

3.) Wenn die Achse eines Cylinders, CD, auf den Grundflächen perpendikulär steht, so ist der Cylinder gerade; im Gegentheil schief. Im ersten Falle gibt eine der Achse parallele Linie seine Höhe; im andern der Perpendikel EF.

4.) Ist die Achse eines Kegels perpendikulär: so ist der Kegel gerade; im Gegentheil schief. Der Perpendikel DC von der Spitze auf die Ebene der Grundfläche bestimmt des Kegels Höhe.

§. 201. Durchschnitte der Körper.

Zeichnung 69. 71. 73. 74. 75.

1.) Die, mit den Grundflächen parallelen Durchschnitte eines Prisma, z. B. IK, sind jederzeit mit denselben und unter einander deckend; und also ist das Prisma längs seiner ganzen Höhe von durchaus gleicher Dicke.

2.) Die, mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte einer Pyramide, z. B. abcd, sind derselben ähnlich; werden aber, je mehr sie sich der Spitze F nähern, um so kleiner.

3.) Die, mit den Grundflächen parallelen Durchschnitte eines Cylinders, z. B. LM, sind Kreise, die unter einander und mit den Grundflächen deckend sind. Der Cylinder ist daher, wie das Prisma, längs seiner ganzen Höhe von gleicher Dicke. — Ein Schnitt durch die Achse CD, oder derselben parallel, gibt ein Parallelogramm BHAG.

4.) Die, mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte eines Kegels sind Kreise, z. B. EGF, die um so kleiner sind, je mehr sie sich des Kegels Spitze D nähern; worin der Kegel mit der Pyramide übereinkommt. Ein Schnitt von der Spitze auf die Grundfläche gibt ein Dreyeck DHI, welches bey einem geraden Kegel gleichschenkelig ist. Ein gegen die Grunfläche schiefer Durchschnitt gibt eine Ellipse. Andere Schnitte geben andere merkwürdige krumme Linien, welche aber Gegenstände der höhern Geometrie sind.

5.) Die Schnitte einer Kugel geben sämmtlich Kreise KL und MN. Der Schnitt durch den Mittelpunct C, gibt den größten Kreis ADEFBGA.

Anmerk. Es versteht sich übrigens, daß die Durchschnitte alle ganz in eine Ebene fallen müssen.

§. 202. Reguläre Körper.

Zeichnung 58—62.

Körper, die von lauter regulären, gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt werden, heißen regulär. Deren gibt es blos 5; und zwar wird das Tetraëdron (Zeichn. 58.) von 4 gleichen gleichseitigen Dreyecken; das Oktaëdron (Zeichn. 59.) von 8, und das Ikosaëdron (Zeichnung 60.) von 20 dergleichen; das Hexaëdron, oder der Würfel (Zeichn. 61.) von 6 gleichen Quadraten; das Dodekaëdron (Zeichn. 62.) von 12 gleichen regulären Fünfecken umschlossen.

§. 203. Netze der Körper.

Zeichnung 58—68.

Wenn man sich die einzelnen Flächen, welche einen Körper begränzen, sämmtlich in einer Ebene an einander gelegt denkt: so erhält man eine Figur, welche das Netz des Körpers genannt wird. Es ist eben so unterhaltend als nützlich, dergleichen Netze auf dünner Pappe zu verzeichnen, gehörig zu falzen, und hierauf zusammen zu leimen; wodurch man die meisten Körper weit richtiger erhält, als sie sich aus Holz nicht schneiden lassen.

Die Netze sind fast alle ohne weitere Erklärung aus den Zeichnungen verständlich. Nur zu dreyen ist eine Bemerkung nöthig.

1.) Um das Netz eines Dodekaëders zu machen, beschreibe man, je nach der beabsichtigten Größe des Körpers, einen Kreis; verzeichne darin (nach §. 147. 1. a.) zuerst ein Einziges Fünfeck, und ziehe dergleichen Hülfslinien, wie in der Zeichnung 62. zu sehen. Aus diesen ergeben sich dann die erforderlichen 6 kleinern Fünfecke gleichsam von selbst. Die andern 6 müssen mit den erstern, und zwar an DB, zusammenhängen. Zu dem Ende verlängere man AB nach F, und mache BF = CD; CD nach E, und mache DE = AB; ferner D nach I, in gerader Linie mit den Puncten G und H, und mache DI, so wie DK und EL, einer Seite des ersten großen Fünfeckes gleich. Die Seiten KL und EI geben sich von selbst, und aus den Hülfslinien erhält man die andern 6 kleinern Fünfecke.

2.) Die aus einander gewickelte Seitenfläche eines Cylinders ABCD (Zeichn. 67.) ist ein Parallelogramm, dessen Grundlinie AB dem Umfange der Grundfläche des Cylinders gleich ist. Die Verzeichnung eines Netzes fordert daher: entweder, dem gegebenen Kreisumfang von E die gerade Linie AB; oder der gegebenen geraden Linie AB den Kreisumfang von E gleich zu machen. Nun ist aber aus §. 165. bekannt, daß die Kreislinie sich nur durch Rechnung rectificiren läßt. Es muß also nach §. 179. das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis berechnet werden; der letztere gibt die Grundlinie des Parallelogramms. Aber eben daraus erhellet zugleich, daß das Netz eines Cylinders nicht geometrisch genau verzeichnet werden könne.

3.) Die abgewickelte Seitenfläche eines Kegels stellt einen Kreisausschnitt CAB vor. Der Halbmesser desselben ist der Seite des Kegels, und des Ausschnitts Bogen dem Umfang der Grundfläche gleich. Um das Netz zu zeichnen, ist es nöthig, den Winkel des Ausschnitts zu wissen. Da sich nun die Kreise wie ihre Halbmesser verhalten, so ergibt sich folgendes Verhältniß.

CD : DE = Grade der Peripherie : (Grade des Winkels ACB.)

Gesetzt also CD (= CA, des Kegels Seite,) verhalte sich zu DE (dem Halbmesser der Grundfläche,) wie 3 zu 1, so hat man den Ansatz:

$3 : 1 = 360^\circ : (120^\circ.)$

Die Hälfte, d. i. 60°, wird dann an beyde Seiten von CD getragen.

Zusatz. Die 63te Zeichnung stellt das Netz des Archimedischen Körpers vor, welcher von 18 gleichen Quadraten und 8 gleichen gleichseitigen Dreyecken, deren Seiten den Seiten der Quadrate gleich sind, umschlossen ist.

XVII.

Von der Gleichheit des Raumes gleichartiger *) Körper.

---

§. 204. Lehrsatz 1.

Alle gleichartigen Körper von gleicher Höhe, und deren Grundflächen gleichen Flächeninhalt haben, sind auch an körperlichem Inhalt oder Raume gleich.

Denn: wenn die Grundflächen an Flächeninhalt gleich sind, so sind auch offenbar die, mit derselben parallelen Durchschnitte, in jedem Punct der Höhe, in dem einen Körper eben so groß als in dem andern. Und wegen gleicher Höhe finden in dem einen eben so viel Durchschnitte Statt als in dem andern, folglich muß der ganze körperliche Raum in allen gleich groß seyn.

---

*) Unter gleichartigen Körpern verstehen wir solche, welche zu Einer Gattung gehören, als: alle und jede Prismen, alle und jede Pyramiden, u. s. w. Noch ist zu merken, daß die folgenden Lehrsätze die Kugel nicht mit begreifen. Kugeln sind einander gleich, wenn ihre Durch- oder Halbmesser gleich sind.

Zusatz. Auch sind gleichartige Körper einander gleich, wenn das Verhältniß ihrer Grundflächen dem umgekehrten Verhältniß ihrer Höhen gleich ist; d. h. wenn die Grundfläche des einen Körpers so viel Mahl größer oder kleiner ist als die Grundfläche des andern, um so viel Mahl seine Höhe kleiner oder größer als die Höhe des andern ist. — Ferner: Körper verhalten sich wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen; und wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben.

§. 205. Lehrsatz 2.

Mehrere gleichartige Körper von gleicher Höhe sind zusammen einem Einzigen von eben der Höhe gleich, dessen Grundfläche so groß ist, wie die Grundflächen jener zusammen genommen.

Denn der Einzige kann in kleinere einzelne zertheilt werden, deren Menge und Größe der Menge und Größe jener gleich ist.

§. 206. Lehrsatz 3.

Zeichnung 69.

Ein dreyseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelopipedons von gleicher Höhe und doppelt so großer Grundfläche.

Man setze an die Seitenfläche eines dreyseitigen Prisma GFA ein anderes gleiches und ähnliches HGB, so erhält

man das Parallelopipedon ADEH; wodurch die Wahrheit dieses Satzes sogleich in die Augen springt.

Zusatz. Das Nähmliche gilt auch von vielseitigen Prismen. Denn jedes vielseitige Prisma kann in dreyseitige zertheilt werden. Da nun von jedem der letztern obiger Lehrsatz wahr ist: so sind folglich auch alle zusammen die Hälfte eines Parallelopipedons von gleicher Höhe, dessen Grundfläche doppelt so groß, als die Grundfläche aller ist.

XVIII.

Von der Gleichheit des Raumes verschiedenartiger *) Körper, und von dem Verhältniß derselben zu einander.

---

§. 207. Lehrsatz 1.

Cylinder sind Prismen, und Kegel sind Pyramiden gleich, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

Denn: da nach §. 165. der Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann: so kön-

---

*) Verschiedenartige Körper nennen wir die, welche nicht zu Einer Gattung gehören.

nen auch die Grundflächen des Cylinders und des Kegels als solche Polygone betrachtet werden; mithin die Seitenfläche des Cylinders als die Summe unendlich vieler Parallelogramme, und die Seitenfläche des Kegels als die Summe unendlich vieler Dreyecke. Indem nun so der Cylinder als ein Prisma, und der Kegel als eine Pyramide anzusehen sind, folgt aus §. 204. die Wahrheit des obigen Satzes.

Zusatz. Die Seitenfläche GH CD eines geraden Cylinders (Zeichn. 67.), dessen Höhe CG dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, ist vier Mahl so groß als diese. Denn: ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem Umkreis, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist, wäre dem Kreise selbst gleich (§. 165.). Hätte ein Dreyeck von solcher Grundlinie den Durchmesser zur Höhe, so wäre es noch Ein Mahl so groß als der Kreis. Und da ein Rechteck doppelt so groß ist als ein Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 135.): so ist ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umkreis, und dessen Höhe dem Durchmesser gleich ist, vier Mahl so groß als der Kreis. Folglich ist die ganze Fläche eines solchen Cylinders sechs Mahl so groß als eine seiner Grundflächen; wie dieß auch beym Würfel (Zeichn. 61.) der Fall ist.

§. 208. Lehrsatz 2.

Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kugelfläche, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Denn so wie man den Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten, und eben so vielen Dreyecken, deren gemeinschaftliche Spitze des Kreises Centrum ist, betrachten kann (§. 165.): so kann man sich auch die Kugel als die Summe unendlich vieler und sehr schmaler Pyramiden denken, deren Grundflächen die Kugelfläche ausmachen, und deren Spitzen sämmtlich in den Mittelpunct fallen, folglich den Halbmesser zur Höhe haben.

§. 209. Lehrsatz 3.

Zeichnung 65. 72.

Eine dreyseitige Pyramide ist ein Drittheil eines dreyseitigen Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche.

Man durchschneide ein dreyseitiges Prisma, wie es die blinden Linien in den Zeichnungen andeuten: so wird man 3 Pyramiden erhalten, welche einander nach §. 204. gleich sind.

Anmerk. Die Anfangs auffallende Figur der Einen Pyramide, welche erfordert, daß man ihre, so wie der beyden andern größte Länge zur Grundfläche annehme, muß einen nicht irre machen. Bey einiger Ueberlegung wird man schon finden, daß Alles seine Richtigkeit hat.

Zusatz. Das Nähmliche gilt auch von vielseitigen Prismen und Pyramiden, weil nach §. 204. alle gleichartigen Körper von gleicher Höhe und Grundfläche (also, unter dieser Bedingung, das viel-seitige Prisma dem drey-seitigen, und die viel-seitige Pyramide der

drey-seitigen) gleich sind; folglich ist (nach Grundsatz No. 4. §. 53.) überhaupt jede Pyramide der dritte Theil von einem jeden Prisma, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

§. 210. Lehrsatz 4.

Ein Kegel ist ein Drittheil von einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Da der Cylinder einem Prisma, und der Kegel einer Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe gleich sind (§. 207.): so gilt der Lehrsatz im vorigen §. auch für Kegel und Cylinder.

§. 211. Lehrsatz 5.

Der körperliche Inhalt einer Kugel beträgt zwey Drittheile von dem eines Cylinders, der den größten Kreis zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hat.

Der Beweis dieses wichtigen Satzes läßt sich hier nicht geben.

Zusatz. Demnach, und wegen §. 210. verhalten sich 1) Kegel, Kugel und Cylinder, deren Durchmesser den Höhen gleich sind, wie 1, 2, 3. Und 2) ist der körperliche Inhalt eines Kegels, der den größten Kreis einer Kugel zur Grundfläche, und ihren Durchmesser zur Höhe hat, halb so groß wie der der Kugel.

§. 212. Lehrsatz 6.

Die Oberfläche einer Kugel ist vier Mahl so groß, als ihr größter Kreis.

Denn: die Kugel ist 1) einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kugelfläche, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist (§. 208.). Es ist aber auch 2) ein Kegel, der den größten Kreis zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hat, halb so groß wie die Kugel (§. 211. Zus. 2.); folglich, wenn er den Halbmesser zur Höhe hätte, nur den vierten Theil so groß. Nimmt man nun die Grundfläche dieses Kegels (den größren Kreis) vier Mahl so groß, so ist derselbe der Kugel, und jene der Kugelfläche an Inhalt gleich.

Zusatz. Die Kugel ist demnach auch einem Kegel gleich, dessen Grundfläche vier Mahl so groß als der größte Kreis, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist.

XIX.
Von der Ausrechnung der Oberflächen der Körper.

---

§. 213. Ausrechnung der Oberflächen eckiger Körper.

Die allgemeinen Regeln (Cap. XII. XIII.) gelten natürlich auch hier. Indessen ist es nicht nöthig, die Körperflä-

chen allemahl einzeln aus ihren Grundlinien und Höhen zu berechnen, sondern es lassen sich bey einigen kleine Vortheile anwenden.

1.) Da alle 6 Seitenflächen eines Würfels gleich groß sind, so darf nur Eine ausgerechnet und das Product mit 6 multiplicirt werden.

2.) Der Inhalt der Seitenflächen eines jeden andern geraden Prisma ergibt sich aus der Multiplication des Umfangs einer Grundfläche mit der Höhe des Prisma; wozu dann der Inhalt beyder Grundflächen addirt werden muß, um den der ganzen Oberfläche zu erhalten.

3.) Der Inhalt der Oberfläche einer geraden Pyramide wird gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben Höhe einer Seitenfläche multiplicirt, und dazu den Inhalt der Grundfläche addirt.

Zusatz. Die Oberfläche einer abgekürzten geraden Pyramide ADbc (Zeichn. 71.) zu finden, berechne man Eine Seitenfläche, multiplicire deren Inhalt mit der Zahl der Seiten der Pyramide, und addire beyde Grundflächen.

§. 214. Ausrechnung der Oberflächen runder Körper.

Zeichnung 74.

1.) Die Seitenfläche eines geraden Cylinders ist das Product aus der Höhe in den Umfang einer Grundfläche. Beyde Grundflächen, die wie Kreise berechnet werden, addirt, gibt die gesammte Oberfläche.

2.) Da die Seitenfläche eines geraden Kegels einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfang der Grundfläche des Kegels, und dessen Höhe der Seite desselben gleich ist (vergl. Zeichn. 68.): so ist die Seitenfläche das Product aus der halben Seite in den Umfang der Grundfläche; diese addirt, gibt die ganze Oberfläche.

Zusatz. Die Seitenfläche des abgekürzten Kegels ABEF zu finden, könnte man zuerst die Seite des fehlenden Stücks suchen, wozu man die Schärfen zweyer Lineale AD und BD also an die Seiten des abgekürzten Kegels legt, daß sie sich in D berühren. Nun wäre ED die gesuchte Seite; deren Hälfte durch den Umfang der Grundfläche EF multiplicirt, gibt die Seitenfläche des fehlenden Stücks EDF. Diese zieht man nun von der Seitenfläche des ganzen Kegels ab; addirt man dann die beyden Grundflächen AB und EF hinzu, so erhält man den Inhalt der ganzen Oberfläche des abgekürzten Kegels.

3.) Weil die Oberfläche einer Kugel 4 Mahl so groß ist, als ihr größter Kreis (§. 212.): so wird dieselbe gefunden, indem man den Inhalt des größten Kreises mit 4 multiplicirt. Oder: weil, um den Inhalt der Kreisfläche zu erfahren, der Umkreis mit dem vierten Theil des Durchmessers (d. i. der halben Höhe des Dreyeckes, das den Umkreis zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat, und welchem der Kreis nach §. 165. gleich ist) multiplicirt werden muß: so findet man den Inhalt der Kugelfläche auch, wenn man den Umfang (des größten Kreises) gleich mit dem Maß des ganzen Durchmessers multiplicirt.

Zusatz. Die Ausrechnung der Oberflächen mancher Körper kommt bisweilen im gemeinen Leben vor; z. B. um zu erfahren, wie viel Goldblättchen zur Vergoldung einer Pyramide; oder wie viel Kupferplatten zur Belegung des kegelförmigen Obertheils eines Thurmes erforderlich seyen. Sollen Thurmknöpfe vergoldet werden, so gründet sich die Berechnung der Kosten offenbar auf die der Kugelfläche.

Anmerk. Bey Vergleichung der Oberflächen ähnlicher Körper muß man ja nicht vergessen: daß sich die Flächen wie die Quadratzahlen ihrer gleichnahmigen Seiten; und die Kugelflächen, in deren Schätzung nach dem Augenmaß man sich am leichtesten irrt, wie die Quadratzahlen ihrer Durchmesser verhalten.

XX.

Vom Cubik- oder Körpermaß, und von der Ausrechnung des Inhalts der Körper.

---

§. 215. Cubikzoll, Cubikschuh u. s. w.

Ein körperlicher Raum, der einen Zoll lang, breit und hoch (oder tief, oder dick) ist, oder mit andern Worten, ein Würfel, dessen Kanten einen Zoll messen, heißt ein Cubikzoll. Ist das Maß der Kanten eines Würfels ein

Schuh, so heißt er ein Cubikschuh; ist es eine Ruthe, so heißt er eine Cubikruthe. Bey Ausrechnung des Erdkörpers rechnet man nach Cubikmeilen.

Die Zeichen dafür sind: $^{c\circ}$, $^{c\prime}$, $^{c\prime\prime}$, $^{c\prime\prime\prime}$.

§. 216. Der Würfel, das Maß aller andern Körper.

Der Würfel, oder Cubus, als der einfachste aller Körper, ist zum Maß der übrigen am geschiktesten. Denn da er gleich lang, breit und hoch ist, so wird er, wie das Quadrat, durch eine einzige Seite oder Kante bestimmt.

§. 217. Eintheilung und Ausrechnung des cubischen Raumes.

Zeichnung 51.

Aus §. 170. ist bekannt: daß, wenn AB = 10′ wäre, AB^q oder ABCD = 100 □′ ist. Nun stelle man sich vor, daß statt der Quadrate Würfel wären, deren jeder also auch eine Höhe = Ad oder 1′ hätte: so befände sich auf ABCD eine Lage von $100^{c\prime}$. Setzte man darauf noch 9 andere, der ersten gleiche Lagen, die zusammen eine Höhe = AC haben würden: so befänden sich über ABCD 10 Mahl 100 oder $1000^{c\prime}$, und dieß würde $1^{c\circ}$ Dec. M. seyn. Demnach findet man den Inhalt eines Würfels, wenn man das Quadratmaß einer Seitenfläche noch mit dem Längenmaß einer Seite multiplicirt. Eine Cubikzahl ist daher eine Zahl, welche entsteht, wenn man eine andere Zahl (die Wurzel) erst mit sich selbst, und

das Product (ihr Quadrat) wieder mit derselben multipliciret; wie folgendes Täfelchen zeigt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	die Wurzeln.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	die Quadrate.
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	die Würfel.

§. 218. Decimal- und Duodecimal-Cubikmaß.

Wer das, was beym Flächenmaß (Cap. XII.) ausführlich genug vorgetragen worden, recht gefaßt hat, wird ohne Anstand begreifen: daß einerley Cubikruthe, die nach dem Decim. M. 10 . 100 = $1000^{c'}$ (§. 217.) hält, 12 . 144 = $1728^{c'}$ Duodec. M. halten muß; so wie dann auch nach ersterm Maß 1000, nach letzterm aber 1728 Cubikzoll auf 1 Cubikschuh, und eben so viel Cubiklinien auf 1 Cubikzoll gehen. Daß ferner $1^{c°}$ Decim. M. = 1000 . $1000^{c''}$, hingegen $1^{c°}$ Duodec. M. = 1728 . $1728^{c''}$ ist, u. s. w. Daß endlich eine Zahlenmenge von z. B. $2,014,005,768^{c'''}$ Decim. M. bloß von 3 zu 3 Ziffern (von der Rechten nach der Linken) abgetheilt zu werden braucht, um die darin steckenden Cubikzolle, Cubikschuh und Cubikruthen zu erfahren; indeß man beym Duodec. M. mit 1728, als der Reductionszahl, dividiren muß.

§. 219. Ausrechnung des Inhalts der Körper.

Einen Körper ausmessen, hieße also: suchen, wie oft ein Cubikzoll, ein Cubikschuh u. s. w. in demselben enthalten sey. So wie man aber den Inhalt der Flächen durch Rechnung findet, wenn man das Maß ihrer Länge

und Breite (oder Grundlinie und Höhe) mit einander multiplicirt (§. 175.): so findet man den cubischen Inhalt der Körper, wenn man das Maß ihrer Länge, Breite und Höhe (oder Tiefe, oder Dicke), d. i. Grundfläche und Höhe mit einander multiplicirt. Ausnahmen s. §. 221. u. ff.

§. 220. Ausrechnung des Inhalts der Prismen und Cylinder.

Man multiplicire den Inhalt einer Grundfläche mit der Höhe.

Zusatz 1. Da die meisten Mauern Parallelopipeda sind, so wie die Backsteine auch, so kann man, wenn bekannt ist, wie viel solcher Steine auf einen Cubikschuh gehen, und man mit dieser Zahl den cubischen Inhalt des Raumes der Mauer multiplicirt, die Anzahl der dazu erforderlichen Steine erfahren.

Zusatz 2. Wenn der cubische Inhalt von Balken u. dgl. m. zu berechnen ist, deren Breiten oder Dicken ungleich sind, so sucht man zuvor deren Mittel, d. h. man addirt die größte und kleinste Breite oder Dicke, und nimmt von dieser Summe die Hälfte. Dieß heißt äquiren.

Zusatz 3. Der Inhalt einer Röhre (nicht der Höhlung, oder des leeren Raums, sondern der Röhre selbst) wird gefunden, wenn man den ganzen und den herausgenommenen Cylinder oder leeren Raum ausrechnet, und diesen von jenem abzieht.

Zusatz 4. Der Inhalt eines Prisma oder Cylinders mit

der Grundfläche dividirt, gibt die Höhe; mit der Höhe dividirt, die Grundfläche.

§. 221. Ausrechnung des Inhalts der Pyramiden und Kegel.

Zeichnung 71. 74.

Zufolge §. 209. 210. kann man sie zuerst als Prismen und Cylinder aus ihrer Grundfläche und Höhe berechnen, und das Product mit 3 dividiren; oder: den Inhalt ihrer Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multipliciren.

Zusatz 1. Der dreyfache Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels mit der Höhe dividirt, gibt die Grundfläche; mit der Grundfläche dividirt, die Höhe.

Zusatz 2. Die Ausrechnung der abgekürzten Pyramide kommt öfter vor. Ihren Inhalt erfährt man, wenn die Höhe der ganzen Pyramide und die des fehlenden Stücks bekannt ist, durch Ausrechnung beyder, und Abziehung des leztern von der erstern. — Das Getreide wird meistens in's Gevierte aufgeschüttet, da dann der Haufen auf allen vier Seiten schief angeht, und eine abgekürzte Pyramide zu bilden pflegt. Der Inhalt läßt sich aber am besten überschlagen, wenn man die obern und untern Breiten, Längen und Höhen mißt, von allen das Mittel sucht, und die Summen durch einander multiplicirt; also den Haufen in Gedanken in ein Parallelopipedon verwandelt. Auf diese Weise erhält man den cubischen Inhalt nach Fußen und Zollen. Weiß man nun, wie viel Cubikzoll auf einen Scheffel,

Mütt, oder wie das Maß sonst heißen mag, geben: so erfährt man die Summe der Scheffel u. s. w. die in dem Haufen enthalten sind, wenn man in den gefundenen cubischen Inhalt desselben mit der Anzahl der Cubikzolle, die auf den Scheffel oder Mütt gehen, dividirt.

Zusatz 3. Die Ausrechnung des abgekürzten Kegels kommt noch öfterer vor. Man findet seinen Inhalt, wenn man den ganzen Kegel, und dann das fehlende Stück ausrechnet, und dieses von jenem abzieht. Hierzu ist wieder nöthig die Höhe des ganzen zu wissen. Diese wird durch folgendes Verhältniß bestimmt: wie KE, der Unterschied des obern und untern Halbmessers EG und AC, sich zu KA, der Höhe des abgekürzten Kegels verhält, so verhält sich der untere Halbmesser AC zu der Höhe des ganzen Kegels. Gesetzt also: EG sey = 2″, AC = 6″, KA = 8″, so hat man den Ansatz:

$$4 : 8 = 6 : (12).$$

Nun lassen sich beyde Kegel aus der untern und obern Grundfläche berechnen.

Um aber z. B. den Inhalt eines gewöhnlichen Trinkglases, eines Eimers u. dgl. m. zu finden, welche auch abgekürzte Kegel sind, thut man besser, sie in Gedanken in Cylinder zu verwandeln, indem man von ihrem obern und untern Durchmesser das Mittel nimmt.

§. 222. Ausrechnung des Inhalts einer Kugel.

Man multiplicire die Kugelfläche mit dem dritten Theil des Halbmessers, oder dem sechsten des Durchmessers.

Diese Regel folgt aus den §§. 208. und 221., und ist unter andern darum vorzuziehen, weil man dabey zugleich den Inhalt der Kugelfläche kennen lernt.

Sonst wird der Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser gegeben ist, auch gefunden, indem man den Inhalt des größten Kreises berechnet, und diesen mit 2/3 des Durchmessers multiplicirt. Eine Regel, die aus dem Lehrsatz §. 211 abgeleitet ist. Und da der Inhalt des größten Kreises gefunden wird, wenn man den Umkreis desselben mit dem halben Radius (= 1/4 Diameter) multiplicirt (§. 181.), welches Product, um den Inhalt der Kugel zu finden, dem Obigen zufolge nun wieder mit 2/3 Diameter multiplicirt werden müßte: so kann man auch, um bisweilen unbequeme Brüche zu vermeiden, beyde Mahl mit dem ganzen Durchmesser, und hierauf mit dem Product aus 1/4 in 2/3, d. i. mit 2/12 oder 1/6 multipliciren, oder, welches einerley ist, mit 6 dividiren *).

§. 223. Ausrechnung des Inhalts der Fässer.

Zeichnung 76. 77.

Die Fässer sind gewissermaßen Cylindern ähnlich; allein ihre Ausrechnung fordert eine besondere Methode. Die leichteste Regel, den Inhalt eines Fasses zu finden, die aber

---

*) Auf den gleichen Lehrsatz §. 211. gründet sich noch folgende Regel: man multiplicire den Würfel des Durchmessers mit 3, 14.... und dividire durch 6. Bequem für den, der mit Decimal-Brüchen rechnen kann.

nicht bewiesen werden kann, wenn sie sich gleich durch die Erfahrung als hinreichend zuverläßig begründet, ist diese:

Man mißt einen Bodendurchmesser AD, und, durch das Spundloch B, den Bauchdurchmesser, oder die Spundtiefe BE. Das Mittel zwischen beyden bestimmt den Durchmesser einer Grundfläche, deren Inhalt durch die Achse des Fasses, MN, multiplicirt, den körperlichen Inhalt desselben gibt.

Diese Regel ist auf die Bemerkung gebauet: daß ein Faß ABCDEF etwas größer als ein innerer Cylinder ACDF; und etwas kleiner als ein äußerer GHIK ist.

Hierauf gründet sich dann das sogenannte Visiren der Fässer. Es wird ein Maßstab (cylindrischer Visirstab) verfertigt, auf dessen einer Seite (der Längenseite) B die Höhe, auf der andern (der Flächenseite) A der Durchmesser irgend eines cylindrischen Maßes verzeichnet ist, welches man zur Einheit annimmt, und woraus Alles gemessen wird. So zeigt nun B1, B2, B3 u. s. w. die einfache, zweyfache, dreyfache Höhe des cylindrischen Maßes an. A1, A2, A3 u. s. w. hingegen, sind Linien, deren Quadrate wie die Zahlen 2, 3 u. s. w. anwachsen; so daß A2 einen 2 Mahl, A3 einen 3 Mahl größern Kreis gibt als A1. Durch Anlegung der Flächenseite A an den Boden- und Bauchdurchmesser erfährt man die Flächen zweyer Kreise, deren Mittel (die Hälfte der addirten Summen beyder) die Grundfläche eines Cylinders gibt, dessen Höhe der Länge oder Achse des Fasses, MN, gleich ist. Diese Grundfläche mit MN multiplicirt,

welche durch die Längenseite B gemessen wird, gibt den Inhalt des Fasses, in Theilen desjenigen cylindrischen Maßes, worauf sich der Visirstab bezieht.

Anmerk. 1. Sind die beyden Boden AD und CF ungleich, so muß zuvörderst deren Mittel gesucht, und alsdann von diesem und dem Bauchdurchmesser BE wiederum das Mittel genommen werden.

Anmerk. 2. Die Richtigkeit dieser Art, Fässer durch visiren auszumessen, ist durch die Erfahrung so bestätigt, daß wir schärfere Methoden hier um so eher übergehen können.

§. 224. Ausrechnung des Inhalts unordentlicher Körper.

Der cubische Inhalt unordentlicher Körper, z. B. Statüen u. dgl. kann gefunden werden, wenn man sie in ein gerades cylindrisches oder prismatisches Gefäß senkt; dieses mit Wasser oder feinem Sand anfüllt, bis der Körper ganz bedeckt ist; denselben wieder herausnimmt, und nun den Raum ausrechnet, um welchen das Wasser oder der Sand gefallen ist. Dieser Raum ist dem Inhalt des Körpers gleich.

Zusatz. Die Ausrechnung des cubischen Inhalts ordentlicher und unordentlicher Körper wird unter andern auch dadurch wichtig, weil man nach demselben ihr Gewicht schätzen kann. Wenn z. B. bekannt ist, wie viel ein Cubikschuh von dieser oder jener Stein- oder Holzart, von diesem oder jenem Metall wiegt, und es soll ein Körper von dergleichen Materie transportirt werden, der sich nicht wägen läßt: so

führt uns die Berechnung seines Inhalts auf sein Gewicht, und dadurch auf die, zu seiner Fortschaffung erforderliche Kraft.

Anmerk. Alle ähnlichen Körper verhalten sich übrigens wie die Würfel ihrer gleichnahmigen Seiten, und die Kugeln wie die Würfel ihrer Durchmesser. Verhält sich also die Seite eines Körpers zu der gleichnahmigen eines ähnlichen wie 5 zu 3, so verhält sich beyder körperlicher Raum wie 125 zu 27. — Eine Kugel wiege 48 Pfund. Will man eine 8 Mahl kleinere und leichtere haben, so muß man die Hälfte ihres Durchmessers nehmen. Denn die Cubikzahl von 48 ist 110592, und die von 24 ist 13824, welche Zahl in der erstern 8 Mahl enthalten ist. — Um solche Veränderungen des körperlichen Inhaltes nach allen beliebigen Verhältnissen vorzunehmen, muß man aber die Ausziehung der Cubikwurzel, und zwar in Decimalbrüchen, verstehen. Indessen hat man auch besondere Instrumente erdacht, mit deren Hülfe die Linien selbst ohne Rechnung gefunden werden. Sie sind unter dem Nahmen des Proportionalzirkels und Caliberstabs bekannt, deren Einrichtung jedoch nur durch eigene Ansicht und mündliche Erklärung ganz verständlich wird.

Zusatz. Zum Schluß mag hier endlich noch mit ein paar Worten der gedenkbaren Entstehungsart einiger geometrischer Körper erwähnt werden, die sich auf

eine angenommene Bewegung der Flächen *) gründet.

Ein Prisma und ein Cylinder entstehen, wenn eine ihrer Grundflächen sich dergestalt fortbewegt, daß sie sich stets parallel bleibt. Der Cylinder (Zeichn. 73.) könnte aber auch durch die Umdrehung eines Parallelogramms ADBC um eine unverrückte Seite CD entstehen. — Ein Kegel (Zeichn. 74.) entsteht, wenn ein rechtwinkeliges Dreyeck ACD sich um den unverrückten Perpendikel DC drehet. — Eine Kugel (Zeichn. 75.) ensteht durch die Umdrehung eines Halbkreises um den unverrückten Durchmesser HI.

---

*) Dieß ist allerdings eine Art Paradoxon, indem Bewegung eigentlich kein Gegenstand der Geometrie seyn kann. Deßwegen hab' ich anfänglich Anstand genommen, davon zu reden. Weil aber doch eine solche Bewegung wenigstens gedenkbar ist, und sonst in vielen Geometrieen vorkommt, ich auch bereits (§. 9. 10.) von der Bewegung des Punctes geredet habe (freylich ohne damahls das noch paradoxere dieser Vorstellung recht zu überlegen), so will ich mit Erwähnung dieser ungeometrischen Definition meine Geometrie schließen.

Anhang.

Kurze Anweisung zum Zeichnen; insbesondere von den dazu nöthigen Materialien und Instrumenten *).

Die Zeichenkunst ist die Kunst: körperliche Gegenstände durch Linien auf Flächen darzustellen. Dieß kann nun entweder aus freyer Hand und nach dem bloßen Augenmaße geschehen; oder aber mit dem Lineal und Zirkel, und vermittelst genauer Ausmessung. Auf jene Art werden die Handzeichnungen, auf diese die Risse verfertigt. Die letztern sind für das bürgerliche Leben die nützlichsten, und eine Menge Handwerker sind im Fall, dergleichen machen zu müssen; wobey allerdings die Fertigkeit, aus freyer Hand zu zeichnen, sehr zu Statten kommt.

Zum Zeichnen braucht man eigenes Zeichenpapier, das größer und stärker als das gewöhnliche ist. Dieses wird auf ein Reißbret gespannt, ein rechteckiges Bret von be-

---

*) Mancher, der mündlichen Unterricht entbehren muß, verliert Mühe, Zeit und Geld, indem er nicht weiß, was zu dieser angenehmen Beschäftigung erfordert wird, und worauf man bey den Materialien und Werkzeugen hauptsächlich zu sehen hat.

liebiger Größe, am besten von Lindenholz, mit eichenen Leisten an den Seiten, damit es sich nicht werfen kann. Zu demselben muß nicht nur völlig ausgetrocknetes Holz genommen, sondern es muß auch auf das sorgfältigste abgehobelt werden. Damit nun das Papier sowohl fest als glatt aufliege, klebt man es mit Kleister auf, womit man den Rand des Papiers rings herum eines Fingers breit bestreicht. Alsdann feuchtet man es mit einem nassen Schwamm mehr oder weniger an, je nachdem es dicker oder dünner ist, und drückt die bekleisterten Ränder so an das Bret, daß sie durchweg ankleben. Ob nun schon das Papier voller Unebenheiten wird, so legt es sich doch in kurzer Zeit ganz glatt an (wenn es anders nicht im Verfertigen eine falsche Richtung erhalten hat, wie dieß bisweilen bey sonst schönen Sorten der Fall ist), und in ein Paar Stunden ist es trocken und brauchbar. Man muß aber das Reißbret nicht etwa an den Ofen stellen, sondern das Papier bloß durch die Stubenwärme trocknen lassen, und es vor Staub verwahren.

Es gibt auch Reißbreter mit Rahmen, worauf das Papier nicht geklebt, sondern zwischen dem Rahmen und Reißbret eingeklemmt wird. Allein diese sind theils theurer, theils erfordern sie so viel Genauigkeit, daß nicht jeder Tischler sie exact genug macht, und endlich kann man kein Stück Papier brauchen, das kleiner als das Bret ist.

Die übrigen nöthigen Materialien sind: Bleystifte, Tusche und Haarpinsel; und, wenn man einen Riß illuminiren will, verschiedene Farben. Die besten Bleystifte sind die englischen, und die beste schwarze Tusche ist die chine-

sische. Man muß sich aber nicht durch die Nahmen täuchen lassen, indem die gewöhnlichen Krämer Bleystifte, Tusche und Farben als englische und chinesische verkaufen, die es so wenig sind als hundert andere Sachen. Die Güte der Bleystifte erkennt man daran, wenn das Reißbley in einer Lichtflamme nicht zu Asche verbrennt, und wenn sie weder zu weich, viel weniger aber so rauh sind, daß sie in's Papier schneiden. Aechte Tusche gibt, wenn man sie naß macht und auf der Hand abreibt, einen Bisamgeruch, und hinterläßt, nachdem sie trocken geworden, einen Goldschimmer. Linien, die mit guter Tusche gezogen sind, verwischen nicht, wenn man nachgehends mit Wasser drüber fährt. Will man die Tusche brauchen, so gießt man ein wenig Wasser in eigens dazu eingerichtete Porzellan-Schälchen, und reibt jene darin so lange, bis dieses die gehörige Schwärze hat. Ist die Tusche gut und das Schälchen glatt, so kommen keine Körner zum Vorschein, und wenn die Flüssigkeit wieder trocken geworden, so läßt sie sich ganz glatt anfühlen. Körnige Tusche aber taugt nichts. Zum Illuminiren eines Risses braucht man sogenannte Saftfarben oder Tuschfarben. Letztere sind in Gestalt von Täfelchen. Grün, Blau, Roth, Gelb und Braun sind die nothwendigen Farben; Saftgrün und Grünspan, Ultramarin, Carmin, Gummiguttä und Sepia — die Arten derselben. Bey den Pinseln muß man darauf sehen, daß sie fest gewickelt sind, so daß einzelne Haare sich nicht herausziehen lassen, sondern eher abreißen. Ferner dürfen die Haare nicht zu lang seyn, und müssen, wenn man sie durch die Lippen zieht, sich an ein-

ander legen und in eine Spitze ausgehen. — Das Gummi elasticum endlich ist zur Auswischung der mit Bleystift gezogenen Linien nothwendig.

Ueber das Hand- und Anschlaglineal, das Dreyeck (welche am besten von Ebenholz gemacht werden), das Winkelmaß, den verjüngten Maßstab, den Hand- und Einsatzzirkel und den Transporteur, ist in den §§. 17. 20. 48—51. 63. 88. 89. 102. der Geometrie, bereits das Nöthige beygebracht worden. Es bleibt nur noch etwas von der Reißfeder zu sagen übrig, mit der die Linien gezogen werden. Die Hand-Reißfeder dient zur Ziehung gerader, die Einsatz-Reißfeder, die in den Einsatzzirkel gesteckt werden kann, zur Beschreibung krummer Linien. Die stählernen Blätter oder Backen müssen nicht stumpf, aber auch nicht zu scharf seyn, weil sie sonst in's Papier einschneiden würden. Um sie mit in Wasser abgeriebener Tusche zu füllen, hält man sie nur an die Oberfläche derselben, so zieht sich von selbst so viel hinein, als nöthig ist. Dann muß man auf einem besondern Blatt Papier probieren, ob die Linien die nöthige Feinheit oder Dicke haben, und nach Maßgabe derselben die Schraube an der Reißfeder stellen; auch diejenige Backe, welche an das Lineal zu liegen kommt, vorher abwischen, damit das Papier nicht befleckt werde. Nach dem Gebrauch schraubt man sie auf, reinigt sie mit Wasser und trocknet sie mit einem Haarpinsel.

Die Reißzeuge oder mathematischen Bestecke enthalten mehrere der genannten Instrumente beysammen. Die ordinären zu 4, 5, oder auch etliche Gulden mehr, sind

nicht so viel Batzen werth. Wer nicht viel Geld daran wenden kann, beschränke sich auf zwey Zirkel, zwey Reißfedern und einen Transporteur, und kaufe diese einzeln, bey einem sogenannten Mechanicus (deren es in jeder Stadt von Bedeutung einen hat,) aber so gut, als sie nur immer zu haben sind. Eigentlichen Liebhabern, und solchen, die Profession von der Geometrie machen, kann ich in allen Arten von Instrumenten den Herrn Mechanicus Eßer in Strasburg mit Recht empfehlen. Die schönen Arbeiten dieses trefflichen Künstlers vereinigen die äußerste Genauigkeit mit der größten Eleganz.

Der Raum dieser Blätter gestattet so wenig eine vollständige Anweisung zum Rissezeichnen, als eine Erklärung der verschiedenen Arten von Rissen. Allein noch einige allgemeine Vorschriften über das Verfahren beym Zeichnen, werden hier am rechten Orte stehen.

Wenn das Papier aufgeklebt und trocken ist, setze man sich mit dem Reißbret, das hinten etwas erhöht seyn muß, damit es schräg liege, an einen Tisch, auf den das Licht von der linken Hand einfällt, und bedecke zugleich den untern Theil des Fensters, welches für das Auge vortheilhafter ist. Den Rand des Papieres lasse man ungefähr 3 Finger breit frey, damit beym Abschneiden desselben vom Brete zwischen der Zeichnung selbst und dem Rand des Papiers ein hinlänglicher Raum bleibt, der dem Riß ein gutes Ansehen gibt. Die mit Bleystift gezogenen Linien müssen fein und zart seyn; und wo man nicht leicht fehlen kann, ziehe man sie lieber gleich mit der Reißfeder. Mit beyden darf man nicht stark

aufdrücken, und der Arm muß sich gleichförmig und leicht beym Ziehen der Linien fortbewegen. Die Spitzen des Zirkels müssen, um das Einstechen möglichst zu verhüten, behutsam und in schräger Richtung aufgesetzt werden. Die Wiesengründe, Berge, Gewässer, Bäume und Gebüsche in Feldmeß-Rissen, werden mit der Feder oder dem Pinsel gezeichnet. Beym Tuschen, wozu man zwey Pinsel auf einen Pinselstock, den man sich allenfalls selbst, in der Größe eines Bleystifts, schnitzeln kann, steckt, muß man hauptsächlich darauf sehen, daß am Ende jedes Pinselzugs genug Nässe übrig bleibt, die mit in den folgenden Zug überfließt; weil sonst Striche und Flecken entstehen würden. Das Illuminiren geschieht am Ende, nachdem die Schatten mit Tusche angelegt sind; und zwar muß man zu jeder Farbe einen besondern Pinsel nehmen.

Wer keine Gelegenheit hat Unterricht im Zeichnen zu genießen, und doch einige Uebung darin wünscht, suche sich folgendes, auch allen Schulen zu empfehlendes Werk zu verschaffen:

Musterzeichnungen, zur Uebung für die Jugend in Bürgerschulen. Gezeichnet von Vieth, herausgegeben von Funke. 6 Hefte mit 36 Kupfertafeln in Querfolio, nebst kurzen Erklärungen. (Feldmeß-Risse finden sich keine darin — sind auch nicht wohl ohne mündliche Anleitung zu verfertigen —; hingegen Bau-Risse und Zeichnungen von Meublen, Instrumenten u. a. m.).

Verbesserungen und Zusätze.

Seite 1. §. 2. Zeile 2. anstatt: eine Mauer, lies: einen Mauerstein.

Ebendaselbst Z. 7. anst. ihre, l. die

S. 41. §. 63. Z. 10. anst. §. 121. l. §. 120 . 2.

S. 53. §. 90. Z. 18. anst. al, l. als

Ebend. Z. 1. von unten, nach ist, setze man hinzu: z

S. 58. §. 98. Z. 5. anst. x, l. y.

S. 74. Z. 5. anst. §. 120. l. §. 120. 1.

Ebend. §. 121. Z. 11. anst. §. 121. l. §. 120. 2.

S. 92. Z. 2. anst. §. 118. 3. l. §. 113.

S. 110. §. 177. Z. 4. nach: man, setze man hinzu: bey einem irregulären.

Ebend. Z. 6. nach: erfährt, setze man hinzu: Bey einem regulären aber braucht man nur Ein Dreyeck auszurechnen, und dessen Inhalt mit der Zahl der Seiten des Polygons zu multipliciren.

S. 111. §. 178. Z. 3. anst. §. 160. l. §. 165.

S. 114. §. 183. Z. 7. nach: Höhe, füge man als Anmerk. hinzu: Die Höhe eines Kreisabschnittes ist der Perpendikel aus der Mitte der Sehne auf den Bogen.

S. 119. Z. 1. anst. Linie, l. Linien.

S. 125. Z. 7. v. u. anst. nach, l. noch.

Ebend. Z. 9. v. u. anst. erhält, l. verhält.

S. 126. Z. 10. v. u. anst. Erdpuncte, l. Endpuncte.

S. 129. Z. 4. v. u. setze man hinzu: Zusatz. Eine Pyramide, von der ein kleineres oder größeres Stück mit der Grundfläche parallel abgeschnitten ist, heißt eine abgekürzte Pyramide, ADbc.

S. 136. §. 204. Z. 11. nach: seyn, füge man hinzu: Also ist z. B. (Zeichn. 70.) AKBM = BHCE.

S. 138. XVIII. Z. 1. 2. anst. verschieartiger, l. verschiedenartiger.

Außer den, vorkommenden Orts im Buche selbst erklärten Zeichen, sind noch folgende zu merken:

(.) ist das Zeichen der Multiplication. Z. B. S. 147. §. 218. Z. 5. bedeutet 10 . 100, so viel als 10 Mahl 100 u. s. w.

(:) ist das Zeichen der Division. Z. B. S. 89. §. 145. Z. 11. bedeutet 360 : 6, so viel als 360 dividirt durch 6.

Dieses Zeichen (:) ist aber auch zugleich das Verhältnißzeichen, und wird, nebst dem Zeichen (=) bey Regel de Tri Sätzen gebraucht, wie z. B. S. 112. §. 179. u. s. w.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

1.
5.
C
A
B
F
A
D
G
K
C
A
R
F
M
C
A
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

C
8
9
A
19.
a
c
22
a
c
25.
D
A
I
C
G
F
L
P
R
b
O
a
E
B
A
x

36
41
45
48
52
55

58
62
K
G
H
A
B
C
D
64
66
68
C
60°
60°
A
B
D
E
70
G
K
H
M
E
I
F
L
O
C
D
A
B
N
74
K
E
H
A
77
G
B
H
A
C
M
L
N
D
F
I
E
K

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Häfelin, Johann Caspar

Ebene und körperliche Elementar-Geometrie

Zürich u.a. 1806

Math.p. 199 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081907-4